TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Jun.-Prof. Martin Schneider, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2019

10. Übungsblatt für die Übungen vom 3.6.-7.6.2019

Ringe

N10.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**
Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer auf. Die Summe aus erster und letzter Ziffer sei die Zahl a. Die Summe aus zweiter und vorletzter Ziffer sei b.

(a) Ist die Gruppe $\underline{\mathbb{Z}_a} \times \underline{\mathbb{Z}_b}$ abelsch?

(b) Ist die Gruppe $\underline{\mathbb{Z}_a} \times \underline{\mathbb{Z}_b}$ zyklisch? Falls ja, geben Sie ein erzeugendes Element an, falls nein, dann ein Element maximaler Ordnung.

(c) Finden Sie alle Untergruppen der Gruppe $\underline{\mathbb{Z}_a} \times \underline{\mathbb{Z}_b}$.
Hinweis: Die letzte Teilaufgabe wird in Abhängigkeit von der Komplexität der Lösung bewertet.

V10.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**
Wir betrachten in dieser Aufgabe, für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, die Menge

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}_n \right\} \subseteq \mathbb{Z}_n^{2\times 2}$$

zusammen mit der üblichen Matrizenaddition und -multiplikation in $\mathbb{Z}_n$.

(a) Zeigen Sie, dass (für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) $\underline{R_n} = (R_n, +, \cdot)$ ein Ring ist. Wie viele Elemente besitzt R_n?

(b) Geben Sie, für $n = 3$ und für $n = 4$, alle Nullteiler und alle Einheiten von $\underline{R_n}$ an.

(c) Finden Sie einen nichttrivialen Unterring (d.h. mit mehr als zwei und weniger als $|R_n|$ Elementen) von $\underline{R_n}$.

Ü10.3 Betrachten Sie $\underline{\mathbb{Z}_3}^2$ als ringtheoretisches Produkt sowie als $\underline{\mathbb{Z}_3}$-Vektorraum. Bestimmen Sie alle Ideale, Unterringe und Untervektorräume.

Ü10.4 (a) Zeigen Sie, dass die Menge der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i] = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Unterring von $\mathbb{C}$ bildet.

(b) Bestimmen Sie alle Nullteiler und alle Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$.
Hinweis: Sie können zur Bestimmung der Einheiten das Quadrat der Norm $|a+bi|^2 = a^2 + b^2$ verwenden.

(c) Zeigen Sie: $7 \in \mathbb{Z}[i]$ ist irreduzibel, aber $5 \in \mathbb{Z}[i]$ ist reduzibel.

(d) Zeigen Sie: Gilt $a^2 + b^2 = p$ für eine Primzahl p, dann ist $a + bi$ irreduzibel.

(e) Zeigen Sie: $1 + i | a + bi \iff a \equiv b \pmod 2$.
Hinweis: Damit ist „jede zweite“ Zahl in $\mathbb{Z}[i]$ ein Vielfaches von $1 + i$.

Ü10.5 Sei R ein faktorieller Ring. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für je zwei Elemente aus R existiert ein ggT.

(b) Für je zwei Elemente aus R existiert ein kgV.

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung. Sie müssen nicht abgegeben werden.

H10.6 Prüfen Sie, ob die folgende Menge mit den angegebenen zwei Operationen ein Ring oder sogar ein Körper ist:

$$(\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \text{ mit } a \oplus b := a + b - 1, \quad a \odot b := a + b - ab.$$

H10.7 Es sei $\underline{K} = (K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann ist $\underline{R} = (R, +, \cdot)$ mit $R := K \times K$ zusammen mit den komponentenweisen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wieder ein Ring.

(a) Finden Sie alle Nullteiler und alle Einheiten von $\underline{R}$. Ist $\underline{R}$ sogar ein Körper?

(b) Zeigen Sie, dass $\Delta_K := \{(k, k) \mid k \in K\} \subseteq R$ ein Unterring von $\underline{R}$ ist. Zeigen Sie, dass $\Delta_K, +, \cdot)$ sogar einen Körper bildet.

(c) Finden Sie zwei weitere Unterringe von $\underline{R}$, die selbst Körper sind.