TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Jun.-Prof. Martin Schneider, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2019

11. Übungsblatt für die Übungen vom 17.6.-21.6.2019

Euklidische, Hauptideal- und faktorielle Ringe

N11.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**
Bestimmen Sie alle irreduziblen Elemente im Ring $\underline{\mathbb{Z}}[i]$ der Gaußschen Zahlen, deren Normquadrat (siehe Aufgabe Ü10.4) höchstens 20 ist. Geben Sie auch die Assoziiertheitsklassen dieser Elemente an.

Bestimmen Sie zu jeder Zahl der Menge $\{a + bi \in \mathbb{Z}[i] \mid a, b \geq 0, a + b = 6\}$ eine Primfaktorzerlegung. Ist diese Zerlegung eindeutig?

Hinweis: Dass $\underline{\mathbb{Z}}[i]$ tatsächlich ein *faktorieller* Ring ist, werden wir noch beweisen.

V11.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**
Geben Sie das von 10 und 14 erzeugte Ideal I des Ringes $\underline{\mathbb{Z}}$ an (Benutzen Sie Bemerkung 5.6(5) der Vorlesung). Ist I ein Hauptideal? Wenn ja, von welchem Element wird es erzeugt (Verwenden Sie eine Argumentation wie im Beweis von Proposition 3.16 der Vorlesung)?

Ü11.3 (a) Bestimmen Sie im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ das kleinste Ideal J, das die Zahlen 2 und $1 + \sqrt{-5}$ enthält.
Erwartet wird Angabe $J = \{x + y\sqrt{-5} \mid$ ...Bedingung für x, y...$\}$ und Begründung.

(b) Zeigen Sie, dass J kein Hauptideal von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Elemente $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$ irreduzibel im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ sind und dass keine zwei von ihnen assoziiert sind. Ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ ein faktorieller Ring?

Ü11.4 Betrachtet wird der Ring der Gaußschen Zahlen (siehe Ü10.4) $\underline{\mathbb{Z}}[i]$.

(a) Bestimmen Sie alle Primteiler der Zahl $p = 2$ in $\underline{\mathbb{Z}}[i]$.

(b) Berechnen Sie alle größten gemeinsamen Teiler von $a = 1 + 3\mathrm{i}$ und $b = 3 + 4\mathrm{i}$ in $\underline{\mathbb{Z}}[i]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbb{Z}}[i]$ (bzgl. des Normquadrats $\delta(z) = |z|^2$) ein Euklidischer Ring ist.

(d) Schließen Sie, dass $\underline{\mathbb{Z}}[i]$ ein faktorieller Ring ist.

Ü11.5 Beweisen Sie Satz 5.11 aus der Vorlesung:

Sei $\underline{R} = (R, +, \cdot)$ ein Hauptidealring und $d, m, a_1, \ldots, a_n \in R$. Dann ist
d ein ggT von $a_1, \ldots, a_n \iff Rd = Ra_1 + \ldots + Ra_n$
m ein kgV von $a_1, \ldots, a_n \iff Rd = Ra_1 \cap \ldots \cap Ra_n$

Die folgenden Selbststudiumsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Stoffes in der Nachbereitung der Lehrveranstaltung. Sie müssen nicht abgegeben werden.

H11.6 Durch $R := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$ (mit den üblichen Operationen für Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$ bzw. in $\mathbb{Z}_3$) wird ein Ring R definiert.

(a) Geben Sie alle Nullteiler von R an. Ist R ein Integritätsbereich?

(b) Zeigen Sie, dass das von $x := (3, 1) \in R$ und $y := (2, 2) \in R$ erzeugte Ideal $I = Rx + Ry \subseteq R$ ein Hauptideal ist.

(c) Zeigen Sie: Für das von den Elementen $(a, b), (c, d) \in R$ erzeugte Ideal $I = R(a, b) + R(c, d)$ gilt: $I = R(\mathrm{ggT}(a, c), b^2 + d^2)$. Ist R ein Hauptidealring?

(d) Bestimmen Sie alle Teiler von $(3, 1) \in R$. Geben Sie die Menge der größten gemeinsamen Teiler der Elemente $(36, 1)$ und $(42, 2)$ in R elementweise an.

(e) Finden Sie einen surjektiven Homomorphismus φ von R in den Ring $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$. Geben Sie den Kern von φ an. Ist φ ein Isomorphismus?

H11.7 Bestimmen Sie, für die Zahl $n = 60 \in \mathbb{Z}$, alle Primfaktorzerlegungen (vgl. Definition 5.1(F4) im Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

H11.8 Der Ring $\underline{\mathbb{Z}}[\sqrt{-5}]$ ist nach Ü11.3 kein Hauptidealring. Zeigen Sie, dass aber jedes Ideal durch 2 Elemente erzeugt wird.

H11.9 Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbb{Z}}[X] = (\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$ kein Hauptidealring ist, indem Sie zeigen, dass das von den Elementen 2 und X erzeugte Ideal $I := \mathbb{Z}[X] \cdot X + \mathbb{Z}[X] \cdot 2$ nicht von einem einzigen Element erzeugt wird.