TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

18. Übungsblatt für die Übungen vom 25.4.-29.4.2016

Affine Räume

V121. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Bestimmen Sie ein LGS, das die Lösungsmenge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ hat (siehe VL 12.2 und 12.3).

(b) Bestimmen Sie die lineare Hülle (siehe VL 4.1) und die affine Hülle (siehe VL 12.3) der Menge $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ü122. (a) Geben Sie alle orthogonalen linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch eine geeignete Darstellungsmatrix an, für die $f(1,0) \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(1,1)\}$ gilt.

(b) Begründen Sie, dass die in (a) gefundene Menge D_4 von Matrizen bezüglich Multiplikation eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(2)$ (vgl. Vorl. 11.7) erzeugt. Zeigen Sie, dass D_4 eine Gruppe ist, in dem Sie die Gruppentafel aufstellen.

Ü123. Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathrm{GF}(2), \mathrm{GF}(3)\}$ und $V = \mathbb{K}^2$. Geben Sie alle n-dimensionalen affinen Unterräume an ($n \in \{0,1,2\}$).

Versuchen Sie dann, für die zugehörige affine Geometrie $\mathrm{Geom}(V)$ eine Skizze anzugeben, wobei die Punkte in einem 2×2- bzw. 3×3-Raster angeordnet sind und eine Gerade als Verbindungs*linie* (kann krumm sein) zwischen den auf ihr liegenden Punkten dargestellt wird. Verwenden Sie dabei unterschiedliche Farben für die verschiedenen Parallelenscharen

Bemerkung: Das Ergebnis sind die affinen Untervektorräume mit 4 bzw. 9 Punkten.

Überlegen Sie, für welche natürlichen Zahlen n es einen affinen Untervektorraum mit n Punkten gibt.

Ü124. (a) Es seien V, W, U drei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to U$ affine Abbildungen. Beweisen Sie: Die Komposition $\psi \circ \varphi$ ist eine affine Abbildung.

Hinweis: Überzeugen Sie sich zuerst davon, dass eine affine Abbildung als Hintereinanderausführung $\tau_w \circ f$ einer linearen Abbildung und einer Translation aufgefasst werden kann. Zum Beweis müssen Sie also zu gegebenen $\varphi = \tau_{w_1} \circ f_1$ und $\psi = \tau_{w_2} \circ f_2$ ein $w \in U$ und eine lineare Abbildung $f : V \to U$ finden, so dass $\psi \circ \varphi = \tau_w \circ f$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Die Menge der bijektiven affinen Abbildungen $\mathrm{Aff}(V)$ bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe

(c) Zeigen Sie: Die Menge der Translationen $T(V)$ bildet (ebenfalls mit der Hintereinanderausführung) eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}(V)$.

Hinweis: Sie können für die Beweise die Definition affiner Abbildungen und Translationen verwenden oder deren Matrixdarstellungen.

A125. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 19. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Das Produkt und die Inversen orthogonaler Matrizen sind wieder orthogonal.

(b) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann orthogonal, wenn $||f(e_1)|| = ||f(e_2)|| = 1$ und $f(e_1) \perp f(e_2)$ gelten.

H126. Es sei $\varphi : V \to W$ eine affine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Das Bild $\varphi(g)$ einer Geraden $g \subseteq V$ ist wieder eine Gerade oder ein Punkt.

Hinweis: Wie üblich, bezeichnen wir mit $\varphi(g) := \{\varphi(x) \mid x \in g\}$ die Menge der Bilder von g.

(b) φ erhält Parallelität, d.h. sind $g, h \subseteq V$ Geraden in V und $\varphi(g), \varphi(h) \in W$ Geraden in W, dann folgt aus $g \parallel h$, dass $\varphi(g) \parallel \varphi(h)$.

(c) φ erhält *Teilverhältnisse*, d.h. liegen die Punkte A, B, C auf einer Geraden g und gilt $B \neq C$, dann gilt $\frac{d(A,B)}{d(B,C)} = \frac{d(\varphi(A),\varphi(B))}{d(\varphi(B),\varphi(C))}$.

H127. (a) Beweisen Sie, dass in einer affinen Geometrie zwei verschiedene parallele Geraden keinen Punkt gemeinsam haben (genauer: mit keinem Punkt gemeinsam inzidieren).

Hinweis: Das ist nicht offensichtlich, sondern muss aus den Axiomen gefolgert werden!

(b) Beweisen Sie: Enthält ein affiner Unterraum eines Vektorraumes V zwei Punkte einer Geraden, so auch alle Punkte der Geraden.

(c) Es sei $\varphi : V \to W$ eine affine Abbildung. Beweisen Sie:
Gilt $\varphi = \tau_w \circ f$ und $\varphi = \tau_{w'} \circ f'$ für Translationen $\tau_w, \tau_{w'}$ und lineare Abbildungen f, f', dann folgt $\tau_w = \tau_{w'}$ und $f = f'$.

Hinweis: Kürzer beschreibt folgende Aussage den obigen Sachverhalt:
Die Zerlegung $\varphi = \tau_w \circ f$ einer affinen Abbildung φ in das Produkt einer Translation und einer linearen Abbildung ist eindeutig.