



1. Übungsblatt für die Übungen vom 9.10.-13.10.2017

Wiederholung: Mengen, Logik

Ziel dieser Übung ist es, dass Sie einige grundlegende mathematische Konzepte, die Sie in der Schule kennengelernt haben, wieder in ihr aktives Wissensreservoir transferieren.

Ü1. Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, & B &= \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 5\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{0, 1, 2\} : x = 2^k\}, & D &= \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 2| \leq 1\}, \\ E &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ein Teiler von } 30\}, & F &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 = 13\}, \\ G &= F \cap C, & H &= A \cup B \cup E, \\ K &= B \setminus A, & L &= A \setminus B. \end{aligned}$$

- (a) Schreiben Sie die Mengen elementweise auf.
(b) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm der Menge $\{A, B, C, D\}$.
(c) Geben Sie alle Teilmengenbeziehungen zwischen den Mengen an.
- Ü2. Ein Gerät kann je nach Kombination der Baugruppen A, B, C, D in verschiedenen Varianten hergestellt werden. Dabei sind jedoch folgende Bedingungen sämtlich einzuhalten:

- Die Baugruppen A und D können, wenn überhaupt, nur gemeinsam auftreten.
- Der Einbau von D macht den Einbau von C erforderlich.
- Eine Variante, die A nicht enthält, muss B enthalten.
- B und D schließen sich gegenseitig aus.

Stellen Sie jede der vier Bedingungen als einen (möglichst einfachen) aussagenlogischen Term dar und ermitteln Sie alle möglichen Bauvarianten.

Ü3. Verneinen Sie folgende Aussagen:

- Es gibt Kurse, in denen jeder Student eine gute Note schaffen kann.
- $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : (|x| < y) \vee (y^2 - 2x^2 = 2)$.
- Zu jedem Mann gibt es mindestens eine Frau, die ihn nicht liebt.

Ü4. Die folgende Behauptung ist offenbar unwahr. Finden Sie den grundsätzlichen Fehler im Aufbau des anschließenden „Beweises“. Formulieren Sie, um diesen Fehler niemals selbst zu begehen, einen geeigneten Merksatz.

Behauptung: Es gilt $1 = 2$.

Beweis: Es sei

$$1 = 2.$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit 0, dann ergibt sich

$$0 = 0.$$

Dies ist eine wahre Aussage, damit ist die Behauptung richtig.

Ü5. Über zwei Mengen A und B ist folgendes bekannt:

- (i) $A \cup B = \{x^2 + y \mid x \in \{0, 1, 2\}, y \in \{0, 1, 2\}\}$
- (ii) $|A| = |B| + 3$
- (iii) $|A \cap B| = 2$
- (iv) $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$

Dadurch sind die Mengen A und B jedoch noch nicht eindeutig festgelegt.

- (1) Geben Sie alle Mengen B elementweise an, die obige vier Bedingungen erfüllen.
- (2) Wie viele Mengenpaare A, B gibt es, die obige Bedingungen erfüllen?

Hinweis: Sie dürfen zur Lösung dieser Aufgabe die Gleichung $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ nutzen.