TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

2. Übungsblatt für die Übungen vom 16.10.-20.10.2017

Logik und Mengen

V6. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Anhand der Wahrheitstafel zeige man, dass für beliebige Aussagen A und B die beiden Ausdrücke $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ und $A \leftrightarrow B$ logisch äquivalent sind.

(b) Gegeben sind die Mengen $U_m = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq m,\ n \text{ ungerade}\}$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$. Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(U_m)|$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und geben Sie die Mengen $\mathcal{P}(U_0)$, $\mathcal{P}(U_1)$ und $\mathcal{P}(U_6)$ konkret an. Wie sieht $\mathcal{P}(\mathcal{P}(U_1))$ aus?

Ü7. (a) Geben Sie Beispiele von Mengen W, X, Y, Z an, für welche die Gleichung $(W \setminus X) \cup (Y \setminus Z) = (W \cup Y) \setminus (X \cup Z)$ verletzt ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Inklusion $(W \cup Y) \setminus (X \cup Z) \subseteq (W \setminus X) \cup (Y \setminus Z)$ stets richtig ist. Argumentieren Sie sorgfältig!

Ü8. Die Prädikate $t_i(n)$ und $s(n)$ über $\mathbb{N}$ seien wie folgt definiert:

$t_i(n)$: n ist durch i teilbar,
$s(n)$: die letzte Ziffer von n (im Dezimalsystem) ist 5.

Untersuchen Sie für jedes der folgenden Prädikate, ob es mit der Quantifizierung $\forall n$ bzw. $\exists n$ eine wahre Aussage darstellt.

(a) $(t_3(n) \wedge t_5(n)) \leftrightarrow t_{15}(n)$, (b) $\neg t_3(n) \vee \neg t_5(n) \vee t_{15}(n)$,
(c) $s(n) \to (t_{15}(n) \wedge \neg t_2(n))$, (d) $s(n) \to (t_{15}(n) \wedge t_2(n))$.

Ü9. (a) Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass folgende Gleichungen für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gelten:

(i) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ (ii) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (iii) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(b) In der Vorlesung ist die Aussage, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer endlichen Menge M die Mächtigkeit $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ hat, angesprochen worden. Beweisen Sie diese Aussage nun mittels vollständiger Induktion.

Finden Sie auch einen Beweis, der ohne Induktion auskommt?

A10. **Hausaufgabe, bitte bis zum 19.10.2017 (Gruppen 1 bis 4) bzw. bis zum 23.10.2017 (Gruppen 5 bis 7), 12:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Beweisen Sie, dass die Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$ *assoziativ* sind, dass also

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \text{ und } (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

für alle Mengen X, Y, Z gelten.

(b) Beweisen Sie, dass die Mengenoperation $\cap$ distributiv über $\cup$ operiert, dass also

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

für alle Mengen X, Y, Z gilt. Beweisen Sie, dass analog $\cup$ distributiv über $\cap$ operiert.

A11. **Hausaufgabe, bitte bis zum 19.10.2017 (Gruppen 1 bis 4) bzw. bis zum 23.10.2017 (Gruppen 5 bis 7), 12:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Ermitteln Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen. Bilden Sie die Negation jeder Aussage und ermitteln Sie deren Wahrheitswert.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}: \ y^2 = x$ (ii) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}: \ y^2 = x$

(iii) $\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R}: \ y^2 = x$ (iv) $\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}: \ y^2 = x$

(v) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}: ((x + y > 0) \land (x + y = 0))$

(vi) $(\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}: x + y > 0) \land (\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 0)$

H12. Überprüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Für alle Mengen Z, X, Y gilt $(Z \cup X = Z \cup Y) \to (X = Y)$.

(b) Für alle Mengen Z, X, Y gilt $(Z \cap X = Z \cap Y) \to (X = Y)$.

(c) Für alle Mengen Z, X, Y gilt: $((Z \cup X = Z \cup Y) \land (Z \cap X = Z \cap Y)) \to (X = Y)$.
Hinweis: Sie können z.B. nutzen, dass $X = X \cap (Z \cup X)$ und $Y = (Z \cup Y) \cap Y$ gilt. Warum?

H13. Mit $H(n)$ bezeichnen wir folgende Aussage: Hat in einer Menge von n Mädchen eines blaue Augen, dann haben alle n Mädchen aus der Menge blaue Augen.

Wo steckt der Fehler im folgenden „Beweis“ durch vollständige Induktion?

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : H(n)$.

„Beweis“:

(a) Induktionsanfang: $H(1)$ ist offenbar richtig.

(b) Induktionsschritt: $H(n)$ sei wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, wir zeigen die Richtigkeit von $H(n+1)$: Wir betrachten $n + 1$ Mädchen (bezeichnet mit $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$), von denen eins ($M_1$) blauäugig sein soll. Die beiden Mengen $\{M_1, \ldots, M_n\}$ und $\{M_1, \ldots, M_{n-1}, M_{n+1}\}$ enthalten jeweils das Mädchen M_1 und besitzen je n Elemente, bestehen also nach Induktionshypothese aus lauter blauäugigen Mädchen. Da alle Mädchen in einer der Mengen vorkommen, sind also alle Mädchen blauäugig.