TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

3. Übungsblatt für die Übungen vom 23.10.-27.10.2017

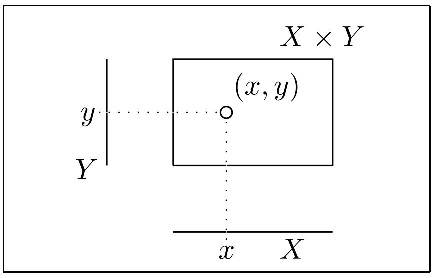
Abbildungen, Gruppen

V14. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

Das kartesische Produkt

$$X \times Y := \{(a, b) : \ a \in X \text{ und } b \in Y\}$$

zweier Mengen X und Y und deren Elemente $(x, y) \in X \times Y$ sollen wie in der Skizze dargestellt werden („Koordinatendarstellung"). Damit kann der Graph $\Gamma_f := \{(x, y) \subseteq X \times Y : \ y = f(x)\}$ einer Abbildung $f : X \to Y$ skizziert werden.



Zeichnen Sie Diagramme von Graphen von Abbildungen f mit folgenden Eigenschaften:

(i) f surjektiv, aber nicht injektiv

(ii) f injektiv, aber nicht surjektiv

(iii) f bijektiv

(iv) f konstant

(v) f nicht surjektiv und nicht injektiv

(vi) $X = Y$ und $f = id_X$

(vii) $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) : \ x \in X\}$ besteht aus genau zwei Elementen.

Ü15. Beschreiben Sie die folgenden Abbildungen in einer geeigneten Weise (Wertetabelle, Aufzeichnen im Koordinatensystem, ...). Untersuchen Sie, ob die Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $f_a : \{0, 1, \ldots, 9\} \to \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad f_a(m) = n :\iff n$ ist die letzte Ziffer von $a \cdot m$ (für $a = 2$, $a = 3$ und $a = 4$),

(b) $g_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g_a(z) := a^z$ (für beliebiges $a \in \mathbb{N}$),

(c) $h_1 : X \to \mathcal{P}(X), \quad h_1(x) = \{x\}$ (für eine beliebige Menge X),

(d) $h_2 : X \to \mathcal{P}(X), \quad h_2(x) = X \setminus \{x\}$,

(e) $h_3 : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \quad h_3(x) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : \ x \in Y\}$,

(f) $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad t(n) = |\{d \in \mathbb{N} : \ \exists c \in \mathbb{N} : (d \cdot c = n)\}|$ (t ordnet jeder natürlichen Zahl die Anzahl ihrer Teiler zu).

Ü16. Es seien X und Y endliche Mengen. Bestimmen Sie die Anzahl

(a) aller

(b) der injektiven

(c) der surjektiven

(d) der bijektiven

(e) der konstanten

Abbildungen $f \in \mathrm{Abb}(X, Y)$. Betrachten Sie ggf. zunächst die Spezialfälle $(|X|, |Y|) \in \{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.

Ü17. (a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Paare Halbgruppen, Monoide bzw. Gruppen sind.

(i) $(2\mathbb{Z}, *)$, dabei ist $2\mathbb{Z}$ die Menge der geraden ganzen Zahlen.

(ii) $(\mathbb{Z}, *)$ mit $x * y := x + y + 2$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

(iii) $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$ mit $x * y := xy + x + y$.
Wie lauten die Inversen von $\frac{1}{2}$ und von $\frac{3}{4}$?

(b) Zeigen Sie: Sind $(G_1, *)$ und $(G_2, \circ)$ Gruppen, dann ist auch das kartesische Produkt $G = G_1 \times G_2$ zusammen mit der Verknüpfung

$$\bullet : G \times G \to G, \quad ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1 * h_1, g_2 \circ h_2)$$

eine Gruppe.

A18. **Hausaufgabe, bitte bis zum 26.10.2017 (Gruppen 1 bis 4) bzw. bis zum 30.10.2017 (Gruppen 5 bis 7), 12:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist g surjektiv.

(d) Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist f injektiv.

Widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel): Ist $g \circ f$ bijektiv, dann sind f und g bijektiv.

A19. **Hausaufgabe, bitte bis zum 26.10.2017 (Gruppen 1 bis 4) bzw. bis zum 30.10.2017 (Gruppen 5 bis 7), 12:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Es sei X eine endliche Menge der Mächtigkeit $|X| = n$. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit der symmetrischen Differenz $\triangle$ (für zwei Mengen A und B definiert durch $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$) als Verknüpfung eine abelsche Gruppe bildet.

H20. Zeigen Sie, dass das Kroneckersymbol $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ eine charakteristische Funktion ist, d.h. geben Sie eine Menge $A \subseteq X \times X$ an, so dass $\delta = \chi_A$ ist.

H21. Es seien Y und Z Mengen. Die Abbildungen

$$\pi_Y : Y \times Z \to Y, \quad (y, z) \mapsto y$$
$$\pi_Z : Y \times Z \to Z, \quad (y, z) \mapsto z$$

heißen *Projektionen (des kartesischen Produkts auf seine Koordinaten).*

Zeigen Sie: Für eine beliebige Menge X ist durch

$$\mathrm{Abb}(X, Y \times Z) \to \mathrm{Abb}(X, Y) \times \mathrm{Abb}(X, Z), \quad f \mapsto (\pi_Y \circ f, \pi_Z \circ f)$$

eine bijektive Abbildung gegeben.