TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

4. Übungsblatt für die Übungen vom 30.10.-3.11.2017

Gruppen, Ringe

Hinweis: Da Dienstag, der 31.10.2017, ein Feiertag ist, besuchen Sie bitte eine andere Übung, falls Sie in einer Gruppe am Dienstag eingeschrieben sind.

V22. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Es seien $X \neq \emptyset$ und Y Mengen sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie:

(i) f ist genau dann injektiv, wenn ein $g : Y \to X$ existiert, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt.

(ii) f ist genau dann surjektiv, wenn ein $g : Y \to X$ existiert, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt.

(iii) f ist genau dann bijektiv, wenn ein $g : Y \to X$ existiert, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gelten.

(b) Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für die Addition und die Multiplikation im Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ auf.
Bestimmen Sie alle Untergruppen der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.
Führen Sie die o.g. Schritte nun für den Restklassenring $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ durch.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$						
$\bar{1}$						
$\bar{2}$						
$\bar{3}$						
$\bar{4}$						
$\bar{5}$						

Ü23. (a) Begründen Sie, dass in Verknüpfungstafeln endlicher Gruppen jede Zeile und jede Spalte genau einmal jedes Element enthält.

(b) Füllen Sie die Verknüpfungstafeln so aus, dass eine Gruppe beschrieben wird.

Hinweise:

- Das Symbol 1 bezeichnet in (a) das neutrale Element
- Jede Zeile und jede Spalte muss jedes Element genau einmal enthalten (vgl. mit dem Spiel *sudoku*).
- Zusätzlich muss die Verknüpfung $*$ assoziativ sein.

(a)

$*$	1	2	3	4
1				
2		1		
3			1	
4				

(b)

$*$	a	b	c	d	e	f
a			a			
b		c		f		
c						
d		e		a		
e					c	
f						c

Ü24. Zeigen Sie: Die Gruppe $S_n = \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$ ist genau dann abelsch, wenn $n \leq 2$.

Ü25. (a) Es sei $H = (H, \cdot)$ eine nichtleere Halbgruppe. Zeigen Sie, dass H genau dann eine Gruppe ist, wenn es für alle $a, b \in H$ Elemente $x, y \in H$ gibt derart, dass

$$a \cdot x = b \quad \text{und} \quad y \cdot a = b.$$

(b) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Gilt $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ für alle $a, b \in G$, dann ist G abelsch.

(ii) Gilt $a^2 = 1$ für alle $a \in G$, dann ist G abelsch.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement. Mit 0 bzw. 1 seien die neutralen Elemente von Addition bzw. Multiplikation in R bezeichnet. Beweisen Sie:

(i) $\forall x \in R : 0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$

(ii) $\forall x \in R : (-1) \cdot x = -x = x \cdot (-1)$

(iii) $(-1) \cdot (-1) = 1$

(iv) $\forall x, y \in R : (-x) \cdot y = -(xy) = x \cdot (-y)$

(v) $\forall x, y \in R : (-x) \cdot (-y) = xy$

A26. **Hausaufgabe, bitte bis zum 2.11.2017 (Gruppen 1 bis 4) bzw. bis zum 6.11.2017 (Gruppen 5 bis 7), 12:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e_G. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $ng := \underbrace{g + g + \ldots + g}_{n-\text{mal}}$, außerdem gelte $0g := e_G$. Zeigen Sie:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : nG := \{ng : \ g \in G\} \leq G.$$

(b) Mittels (a) haben Sie u.a. gezeigt (siehe LAAG I.3.20(d)), dass $n\mathbb{Z} := \{nx : \ x \in \mathbb{Z}\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ keine weiteren Untergruppen hat, d.h. zeigen Sie, dass:

$$H \leq \mathbb{Z} \implies \exists n \in \mathbb{N}_0 : H = n\mathbb{Z}$$

A27. **Hausaufgabe, bitte bis zum 2.11.2017 (Gruppen 1 bis 4) bzw. bis zum 6.11.2017 (Gruppen 5 bis 7), 12:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten im C-Flügel unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Bestimmen Sie die Verknüpfungstafeln der Gruppen $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +_1)$ (mit der Addition modulo 4 als Verknüpfung) und $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +_2)$ (mit der komponentenweisen Addition modulo 2 als Verknüpfung). Geben Sie jeweils alle Untergruppen an und begründen Sie, warum es keine weiteren Untergruppen gibt.

H28. Zeigen Sie: Sind $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe, dann ist das kartesische Produkt $R := R_1 \times R_2$ zusammen mit den komponentenweisen Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + :& R \times R \to R, ((r_1, r_2), (s_1, s_2)) \mapsto (r_1 +_1 s_1, r_2 +_2 s_2) \\ \cdot :& R \times R \to R, ((r_1, r_2), (s_1, s_2)) \mapsto (r_1 \cdot_1 s_1, r_2 \cdot_2 s_2) \end{aligned}$$

wieder ein Ring.

H29. (a) Beweisen Sie das *allgemeine Assoziativitätsgesetz*: Die Produkte von $n \geq 3$ Elementen in einer Gruppe hängen nicht von der Wahl der Klammerung ab.

Hinweis: Beweisen Sie diese Aussage z.B. durch Induktion über n.

(b) Beweisen Sie das *allgemeine Kommutativitätsgesetz*: Sei $(H, \cdot)$ eine abelsche Gruppe und $a_1, \ldots a_n \in H$. Dann gilt

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = a_{\pi(1)} \cdot a_{\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n)}$$

für jede Permutation $\pi \in S_n = \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$.