TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

5. Übungsblatt für die Übungen vom 6.11.-10.11.2017

Ringe, Körper, Polynome

V30. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Laut Vorlesung LAAG I.5.9. ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist. Verifizieren Sie diese Aussage für $n = 6$ und für $n = 7$. Sie können dazu die in V22 aufgestellten Verknüpfungstafeln verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass die Charakteristik eines endlichen Körpers eine Primzahl ist.

(c) In LAAG I.6.2 haben Sie (ohne Beweis) kennengelernt: Ist R ein kommutativer Ring mit Einselement, dann ist auch $R[X]$ ein kommutativer Ring mit Einselement (der Polynomring über R). Beweisen Sie, dass in $R[X]$ die Distributivgesetze gelten.

Ü31. Zeigen Sie das *Unterringkriterium*: Ist R ein Ring und $\emptyset \neq S \subseteq R$, dann ist S genau dann Unterring von R, wenn folgende Bedingungen gelten:

(UR1) S ist abgeschlossen bzgl. Addition

(UR2) S ist abgeschlossen bzgl. Bildung additiver Inverser

(UR3) S ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation

Ü32. (a) Zeigen Sie: Mit den in LAAG I.5.6 eingeführten Bezeichnungen gilt für alle komplexen Zahlen $(x, y) \in \mathbb{C} : (x, y) = x + yi$. Zeigen Sie außerdem $i^2 = -1$.

Hinweis: In dieser Darstellung wird x oft *Realteil* und y *Imaginärteil* genannt; i wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet.

(b) Zeigen Sie: $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

(c) In $\mathbb{C}$ führen wir die *Normfunktion* ein, die jedem Element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ seinen „Abstand zum Nullpunkt“ $|z|$ zuordnet. Präziser:

$$|.| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \mapsto |(x, y)| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Zeigen Sie: Die Normfunktion ist *multiplikativ*, d.h. es gilt $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Ü33. (a) Bestimmen Sie Polynome $h, r \in \mathbb{R}[X]$, so dass

$$-12X^5 + 8X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1 = (4X^2 + 1) \cdot h + r$$

mit $\deg(r) < 2$ gilt.

(b) Bestimmen Sie Polynome $h, r \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$, so dass

$$X^6 + X^4 + X^2 + 2X = (2X^2 + X + 1) \cdot h + r$$

mit $\deg(r) < 2$ gilt.

A34. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 9.11.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 13.11.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Es sei K ein Körper. Dann ist das kartesische Produkt $R := K \times K$ zusammen mit den komponentenweisen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wieder ein Ring (siehe H28).

(a) Finden Sie alle Nullteiler und alle Einheiten von R. Ist R sogar ein Körper?

(b) Zeigen Sie, dass $\Delta_K := \{(k,k) : \ k \in K\} \subseteq R$ ein Unterring von R ist. Zeigen Sie, dass Δ_K sogar einen Körper bildet.

(c) Finden Sie zwei weitere Unterringe von R, die selbst Körper sind.

A35. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 9.11.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 13.11.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel

(a) Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen mit Rest über den jeweiligen Körpern aus:

(i) $(-X^5 + 3X^2 + 1) : (X^3 + X^2)$ über $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

(ii) $(X^9 + X^8 + X^7 + X^5) : (X^3 + X)$ über $\mathbb{Q}$

(iii) $(X^4 - 1) : (X^2 + 2)$ über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $X^n - 1 \in \mathbb{R}[X]$ ohne Rest durch $(X-1)$ teilbar ist. Geben Sie (in Abhängigkeit von n) den Quotienten an.

(c) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $X^{2n+1} + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ohne Rest durch $(X+1)$ teilbar ist.

H36. Zeigen Sie: Ist R ein Ring und X eine Menge, dann ist die Menge $\mathrm{Abb}(X, R)$ der Abbildungen von X nach R (mit punktweiser Addition und Multiplikation) selbst ein Ring.

H37. Beweisen Sie Bemerkung I.6.2 aus der Vorlesung: Ist R ein kommutativer Ring mit Einselement, dann ist auch $R[X]$ ein kommutativer Ring mit Einselement (der Polynomring über R).

H38. Sei R ein endlicher kommutativer Ring mit Einselement. Zeigen Sie, dass jedes von Null verschiedene Element von R entweder Nullteiler oder Einheit ist. Folgern Sie, dass jeder endliche nullteilerfreie, kommutative Ring mit Einselement bereits ein Körper ist.