TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

6. Übungsblatt für die Übungen vom 13.11.-17.11.2017

Polynome, Vektorräume

V39. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Sind die folgenden Teilmengen Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie ihre Antwort jeweils. Skizzieren Sie die angegebenen Mengen.

(i)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \cdot y \geq 0\}$,	(ii)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0\}$,
(iii)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \cdot y = 0\}$,	(iv)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 0\}$,
(v)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y = 0\}$,	(vi)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y = 1\}$.

Ü40. (a) Zeigen Sie: Hat das Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ mindestens 4 Nullstellen in $\mathbb{Z}$, dann ist $f(k) \neq 5$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$f \ = \ -\overline{6} + X + X^2 \ = \ (-\overline{2} + X)(\overline{3} + X) \ \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X],$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n alle Nullstellen von f für $n \in \{3,4,5,6\}$.

Ü41. (a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge V, einer Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ und einer Abbildung $\cdot : K \times V \to V$ (für einen Körper K) jeweils ein Vektorraum sind.

(i) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{Q}$, $\lambda \cdot x := \lambda + x - 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}$.

(ii) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Z}$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{Z}$, $\cdot$ ist die übliche Multiplikation in $\mathbb{Q}$.

(iii) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{R}$, $\lambda \cdot x := x$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$.

(iv) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{R}$, $\lambda \cdot x := 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

(v) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot (x,y)$ ist der Punkt in $\mathbb{R}^2$, der sich durch Drehung von (x,y) um den Winkel λ um $(0,0)$ im Uhrzeigersinn ($\lambda > 0$) oder Gegenuhrzeigersinn ($\lambda < 0$) ergibt.

(b) Beweisen Sie LAAG II.1.4: Ist K ein Körper, dann ist K^n ein K-Vektorraum.

Ü42. Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume sind:

(a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = b = 2c\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(b) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(c) $\{(a+b, b^2) \in \mathbb{R}^2 : \ a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(d) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(e) $\{f \in \mathbb{R}[X] : \ \forall x \in \mathbb{R}(f(x) = f(-x))\} \subseteq \mathbb{R}[X]$,

(f) $\{f = \sum_{i=0}^n p_i X^i \in \mathbb{R}[X]_{\leq n} : \ \sum_{i=0}^n p_i = a\} \subseteq \mathbb{R}[X]$ (für einen Parameter $a \in \mathbb{R}$).

A43. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis: Gruppen 1-4: 16.11.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG Gruppen 5-7: 20.11.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel**

(a) Zeigen Sie LAAG II.1.6(c): Ist der Körper K ein Unterring eines kommutativen Rings R mit Einselement $1 \in K$, so wird R durch Einschränkung der Multiplikation $R \times R \to R$ zu einer Abbildung $K \times R \to R$ zu einem K-Vektorraum.

(b) Zeigen Sie LAAG II.1.6(d): Ist X ein Menge und W ein K-Vektorraum, so wird die Menge der Abbildungen $V = \mathrm{Abb}(X, W)$ durch punktweise Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und Skalarmultiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

zu einem K-Vektorraum.

A44. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis: Gruppen 1-4: 9.11.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG Gruppen 5-7: 13.11.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel**

(a) Sei A eine Menge. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. Dabei sei die Vektorraumaddition durch die symmetrische Differenz $\triangle$ und die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch $\overline{0} \cdot X := \emptyset$ und $\overline{1} \cdot X := X$ gegeben.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage: Für jede Teilmenge $B \subseteq A$ ist $\mathcal{P}(B)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{P}(A)$.

H45. Zeigen Sie: Sind V_1 und V_2 K-Vektorräume, dann ist $V_1 \times V_2$ wieder (mit komponentenweiser Skalarmultiplikation) ein K-Vektorraum.

H46. Entscheiden Sie für jedes der folgenden Paare (K, V) aus einem Körper K und einer abelschen Gruppe V, ob es eine Abbildung $\cdot : K \times V \to V$ gibt, die V mit $\cdot$ als Skalarmultiplikation zu einem Vektorraum macht. Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V = (\mathbb{Q}, +)$

(b) $K = \mathbb{Q}$, $1 < |V| \in \mathbb{N}$

(c) $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

(d) $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$

H47. Durch die Abbildung

$$\overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad a + bi \mapsto a - bi$$

wird jeder komplexen Zahl z ihre *komplex konjugierte Zahl* $\overline{z}$ zugeordnet.

(a) Zeigen Sie (s. Ü32(c)), dass $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten.

(c) Beweisen Sie: Ist f ein reelles Polynom (d.h. $f \in \mathbb{R}[X]$), dann gilt $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Schlussfolgern Sie: Ist z eine Nullstelle von f, dann auch $\overline{z}$.