Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

7. Übungsblatt für die Übungen vom 20.11.-24.11.2017

Linearkombinationen und lineare Unabhängigkeit

V48. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Welche der folgenden Tupel von Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig? Geben Sie im Fall linearer Abhängigkeit eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors an (ggf. in Abhängigkeit von den Werten $b, c \in \mathbb{R}$).

(a1) $((2,0),(1,1),(0,2))$ (a2) $((1,1,0),(2,0,2),(0,2,3))$ (a3) $((1,b),(c,1))$

Überprüfen Sie nochmals die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit, wenn der zugrundeliegende Körper nicht $\mathbb{R}$ sondern $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist.

(b) Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $x, y, z \in V$ linear unabhängig. Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel ebenfalls linear unabhängig sind.

(b1) $(-x, x+y+y)$ (b2) $(x-y, x-z, y-z)$

(c) Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus V. Beweisen oder widerlegen Sie: Gibt es ein $i \in I$, so dass sich x_i nicht als Linearkombination der anderen Elemente von $\mathcal{F}$ darstellen lässt, dann ist $\mathcal{F}$ linear unabhängig.

Ü49. In dieser Aufgabe betrachten wir den $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum $V := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

(a) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge

$$W := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]_{\le 2} := \{a_0 + a_1X + a_2X^2 :\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$$

Begründen Sie, dass W ein Untervektorraum von V ist.

(b) Sind die Polynome $p = X^2 + X$, $q = X^3 + X^2$, $r = X^3$ linear unabhängig in V?

(c) Stellen Sie das Polynom $s = X$ als Linearkombination von p, q und r dar.

(d) Beweisen Sie: Jedes Tupel (x_1, x_2, x_3, x_4) (mit $x_i \in W$ für alle $i \in \{1,2,3,4\}$) ist linear abhängig.

Ü50. (a) Es sei $K := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Visualisieren Sie den K-Vektorraum K^3 durch einen Würfel.

(b) Es seien $v = (0,1,1)$ und $w = (1,1,1)$ zwei Vektoren aus K^3. Geben Sie alle Vektoren aus $\operatorname{span}_K(v,w)$ an.

(c) Geben Sie (mit Begründung) alle Vektoren $x \in K^3$ an, so dass das Tripel (v, w, x) linear unabhängig ist.

(d) Wie viele Untervektorräume hat der Vektorraum K^3? Begründen Sie! Geben Sie zu jeder auftretenden „Dimension" ein Beispiel an.

Ü51. Im folgenden seien V ein K-Vektorraum, U ein Untervektorraum von V sowie $\lambda \in K$ und $x, x', y, y' \in V$ beliebig. Ein *affiner Unterraum* ist eine Menge der Form $x + U := \{x + u : u \in U\}$.

(a) Visualisieren Sie im Fall $K = \mathbb{R}$ und $V \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\}$ die Menge $x + U$ für verschiedene $x \in V$ und Untervektorräume U.

(b) Beweisen Sie: $x + U = y + U \iff x - y \in U$.

(c) Beweisen Sie: Aus $x+U = x'+U$ und $y+U = y'+U$ folgen $(x+y)+U = (x'+y')+U$ und $\lambda x + U = \lambda x' + U$.

A52. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 23.11.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 27.11.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Es seien $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V = K^3$ ein K-Vektorraum.

(a) Es seien $v_1 = (0,0,1), v_2 = (0,1,0)$ sowie $w_1 = (2,0,1), w_2 = (0,1,2)$ Vektoren aus V. Geben Sie alle Vektoren $x \in V$ an, so dass beide Tupel (v_1, v_2, x) und (w_1, w_2, x) linear unabhängig sind.

(b) Es sei $u = (1,0,0)$. Bestimmen Sie $\operatorname{span}_K(u, v_2) \cap \operatorname{span}_K(w_1, w_2)$.

(c)* Geben Sie alle Untervektorräume von V an, die den Vektor u enthalten.

A53. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 23.11.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 27.11.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel

(a) Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $H \subseteq J \subseteq I$ Mengen und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus V. Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} (v_j)_{j\in J} \text{ linear unabhängig } &\implies (v_h)_{h\in H} \text{ linear unabhängig} \\ (v_j)_{j\in J} \text{ linear abhängig } &\implies (v_i)_{i\in I} \text{ linear abhängig} \end{aligned}$$

Hinweis: Sie sollen also folgendes zeigen: Jede Teilfamilie einer linear unabhängigen Familie ist linear unabhängig. Jede Oberfamilie einer linear abhängigen Familie ist linear abhängig.

(b) Es seien K ein Körper und V und W K-Vektorräume.

(i) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $(w_1, \ldots, w_n)$ linear unabhängige Tupel in V bzw. W. Beweisen oder widerlegen Sie: $((v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n))$ ist ein linear unabhängiges Tupel in $V \times W$.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $((v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n))$ ein linear unabhängiges Tupel in $V \times W$. Beweisen oder widerlegen Sie: $(v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $(w_1, \ldots, w_n)$ sind linear unabhängige Tupel in V bzw. W.

H54. Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $x, v \in V$. Eine *Gerade* in V durch einen „Punkt“ x mit der „Richtung“ v ist ein affiner Unterraum der Form $\{x + \lambda v : \lambda \in K\}$.

Zeigen Sie: Durch zwei nichtidentische „Punkte“ verläuft genau eine Gerade.

Zeigen Sie: Drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ liegen genau dann auf einer Geraden, wenn es Skalare $a, b, c \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich Null sind, gibt, so dass $au + bv + cw = 0_{\mathbb{R}^n}$ und $a + b + c = 0$ gelten.