TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

8. Übungsblatt für die Übungen vom 27.11.-1.12.2017

Basen von Vektorräumen

V55. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Welche der folgenden Tupel/Familien $\mathcal{F}$ von Vektoren lassen sich zu einer Basis des entsprechenden K-Vektorraums V vervollständigen? Geben Sie eine Basis an, falls möglich.

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((2,0,0),(2,2,0),(2,2,2))$,
(b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = ((a,1),(b,0))$ (Die Lösung hängt von den Werten $a, b \in \mathbb{R}$ ab.),
(c) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$, $\mathcal{F} = ((0,0,0))$,
(d) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{F} = ((1,i,i+2),(-i,1,-2i+1))$,
(e) $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $V = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$, $\mathcal{F} = ((1,2,0),(4,1,0))$,
(f) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}[X]_{\leq 2}$, $\mathcal{F} = (X^2+1, X^2+X+5)$,

Ü56. Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume der $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$ bzw. des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^n$ (für geeignetes n) sind. Geben Sie ggf. eine Basis an.

(a) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = -3x_1\}$
(b) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{C}^3 : \ x_3 = i \cdot x_1\}$
(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
(d) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = x_1 + 1, x_2 = x_1^2\}$

Ü57. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $P := \{f \in \mathbb{Q}[X] : \ f(1) = 0\}$ aller Polynome, die eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ besitzen, einen Untervektorraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}[X]$ bildet.
(b) Geben Sie eine Basis B von P an (Sie müssen natürlich auch beweisen, dass die von Ihnen gefundene Familie tatsächlich eine Basis ist).

Ü58. (a) Wann besitzt ein Vektorraum genau eine Basis?
(b) Es seien K ein Körper und (v_1,v_2,v_3) eine Basis des K-Vektorraums V. Weiter sei $w = v_1 + v_2$. Geben Sie alle Basen an, die nur Elemente aus $\{v_1,v_2,v_3,w\}$ enthalten.
(c) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $B = (x_i)_{i \in I}$. Geben Sie eine Basis von V an, wenn V als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst wird.

A59. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 30.11.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 4.12.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Sei (b_1,b_2,b_3,b_4) eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^4$. Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 seien folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} v_1 &:= b_1 - 2b_2 + b_4, \\ v_2 &:= 2b_3 + 5b_4, \\ v_3 &:= -2b_1 + 4b_2 + 2b_3 + 3b_4. \end{aligned}$$

(a) Sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig?

(b) Geben Sie eine Basis für $U := \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(v_1, v_2, v_3)$ an.

(c) Ergänzen Sie (mit Begründung!) die Basis aus (b) zu einer Basis von $\mathbb{Q}^4$.

A60. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 30.11.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 4.12.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Es sei V ein K-Vektorraum und $a, b, c \in V$. Weiter gelte

$$x = a + b, \quad y = a + c, \quad z = b + c.$$

Zeigen Sie, dass für $K = \mathbb{R}$ das Tripel (a, b, c) genau dann eine Basis von V ist, wenn (x, y, z) eine Basis von V ist.

Finden Sie einen Körper K, in dem obige Äquivalenz nicht gilt, d.h. finden Sie einen Körper K, einen K-Vektorraum V und $a, b, c \in V$, so dass (a, b, c) in V linear unabhängig ist, (x, y, z) jedoch nicht.

H61. Es seien K ein Körper und V bzw. W K-Vektorräume mit Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $(w_1, \ldots, w_m)$. Zeigen Sie, dass

$$((v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_m))$$

eine Basis des K-Vektorraums $V \times W$ (vgl. Aufgabe H45) ist.

H62. Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Weiter seien $x, x' \in V$ und U und U' seien Untervektorräume von V. Dann sind $x + U$ und $x' + U'$ affine Unterräume (siehe Ü51) von V. Schließlich sei $Z := (x + U) \cap (x' + U')$

Zeigen Sie: Ist $Z \neq \emptyset$, dann ist Z ein affiner Unterraum von V.