TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

9. Übungsblatt für die Übungen vom 4.12.-8.12.2017

Dimension, direkte Summe, Komplement

V63. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Untervektorräume U zu gegebenen Körpern K und K-Vektorräumen V. Bestimmen Sie außerdem jeweils ein lineares Komplement (vgl. LAAG II.4.10) W zu U in V.

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}((1,2,3),(1,0,0))$

(ii) $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $V = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$, $U = \operatorname{span}_K((1,3,4,0),(0,3,1,2),(2,0,1,1))$

(iii) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}[X]$, $U = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}((X^i - 1)_{i\in\mathbb{N}})$

(b) Es seien K ein Körper und U und W Untervektorräume des Vektorraums K^3. Weiter sei $K^3 = U \oplus W$. Zeigen Sie, dass dann $\dim_K(U) \neq \dim_K(W)$ gilt.

Ü64. (a) Wann sind zwei Vektoren $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ linear abhängig im $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum $\mathcal{P}(A)$ (siehe Aufgabe A44)?

(b) Es seien $X, Y \in \mathcal{P}(A)$. Geben Sie alle Elemente von $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(X,Y)$ an. Welche Mächtigkeit hat $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(X,Y)$ in Abhängigkeit von X und Y?

(c) Es sei $|A| = n$. Welche Dimension hat der $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum $\mathcal{P}(A)$? Geben Sie eine Basis B an. Geben Sie eine weitere Basis B' an, die nicht die gleichen Elemente wie B enthält.

(d) Es seien $B_1 \subseteq A$ und $B_2 \subseteq A$. Nach A44 sind dann $\mathcal{P}(B_1)$ und $\mathcal{P}(B_2)$ Untervektorräume von $\mathcal{P}(A)$. Zeigen Sie

$$\mathcal{P}(B_1) + \mathcal{P}(B_2) = \mathcal{P}(B_1 \cup B_2) \quad \text{sowie} \quad \mathcal{P}(B_1) \cap \mathcal{P}(B_2) = \mathcal{P}(B_1 \cap B_2).$$

Überprüfen Sie die Dimensionsformel (LAAG II.4.12) mit dem erhaltenen Ergebnis.

Ü65. (a) Es sei K ein endlicher Körper. Bestimmen Sie die Anzahl der Basen des Vektorraums K^n.

(b) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nicht endlich-dimensional ist.

Ü66. Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\emptyset \neq U \subseteq V$. Beweisen Sie: Genau dann ist U ein affiner Unterraum von V, wenn für alle $x_1, \ldots, x_n \in U$ und alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in U.$$

A67. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 7.12.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 11.12.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel

(a) Bestimmen Sie die Dimension des von den Vektoren

$$u_1 = (1,1,0,1), \quad u_2 = (3-4i, 1+i, 3+i, 2+4i), \quad u_3 = (-i,0,0,1+i), \quad u_4 = (-i,0,1,0)$$

aufgespannten Untervektorraums $U = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^4$. Bestimmen Sie eine Basis B von U sowie ein lineares Komplement W zu U in $\mathbb{C}^4$.

(b) Es sei $U' = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}((0,0,0,1),(0,0,1,0))$ ein weiterer Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$. Verifizieren Sie die Dimensionsformel am Beispiel von U und U', d.h. bestimmen Sie $\dim(U+U')$ und $\dim(U\cap U')$ und prüfen Sie, dass die Gleichung $\dim(U+U') = \dim(U) + \dim(U') - \dim(U\cap U')$ tatsächlich gilt.

A68. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 7.12.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 11.12.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie: Genau dann gilt $\dim_K(V) \geq n$, wenn eine echt aufsteigende Kette von Untervektorräumen $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n$ von V (eine sogenannte Fahne) existiert.

H69. Es seien K ein Körper und $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektorräumen. Beweisen Sie:

(a) Das externe direkte Produkt (LAAG II.4.13) $\prod\limits_{i\in I} V_i$ ist ein K-Vektorraum.

(b) Die externe direkte Summe (LAAG II.4.14)

$$\bigoplus_{i\in I} V_i = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i : \ x_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\}$$

ist ein Untervektorraum von $\prod_{i\in I} V_i$.

H70. Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Weiter seien $U_1, \ldots, U_k$ $(n-1)$-dimensionale Untervektorräume von V. Zeigen Sie $\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_k) \geq n-k$.