Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

10. Übungsblatt für die Übungen vom 11.12.-15.12.2017

Matrizen, Gruppenhomomorphismen

V71. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Gegeben seien die folgenden Matrizen (über $\mathbb{Q}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte mit zwei Faktoren.

(b) Überlegen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\varphi_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Homomorphismen, Epimorphismen, Monomorphismen oder Isomorphismen zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ sind.

$$\varphi_1 : z \mapsto z + 1, \qquad \varphi_2 : z \mapsto 2z, \qquad \varphi_3 : z \mapsto -z.$$

Ü72. Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Beweisen Sie: Der Matrizenring $\mathrm{Mat}_n(K)$ ist genau dann kommutativ, wenn $n < 2$.

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ genau dann mit allen Matrizen $C \in \mathrm{Mat}_n(K)$ kommutiert (d.h. es gilt $AC = CA$), wenn $A = \lambda \mathbb{1}_n$ für ein $\lambda \in K$ gilt.

Hinweis: Multiplizieren Sie dazu z.B. A nacheinander von links und von rechts mit geeigneten Basismatrizen $E_{kl}, k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Beweisen Sie die Aussage ggf. zunächst für $n = 2$.

Ü73. (a) Es seien K ein Körper und $m, n, r \in \mathbb{N}$.

(i) Beweisen Sie: $\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) : (A + B)^t = A^t + B^t$.

(ii) Beweisen Sie: $\forall A \in \mathrm{Mat}_{r\times m}(K) \forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) : (AB)^t = B^t A^t$.

(b) Eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt *symmetrisch*, falls $M^t = M$ gilt und *schiefsymmetrisch*, falls $M^t = -M$ gilt.

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass AA^t eine symmetrische Matrix ist. Zeigen Sie für den Fall $m = n$, dass $A + A^t$ eine symmetrische und $A - A^t$ eine schiefsymmetrische Matrix ist.

Ü74. (a) Finden Sie einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ und $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times, \cdot)$.

(b) Es seien G und H Gruppen. Beweisen Sie:

(i) Ist $k \in \mathbb{Z}$ und G abelsch, dann ist $\varphi : G \to G$ mit $\varphi(g) = kg$ ein Gruppenhomomorphismus

Hinweis: Wie in Aufgabe A26 definieren wir $kg := \underbrace{g + g + \ldots + g}_{k\text{-mal}}$ für $k > 0$ und $kg := e_G$ für $k = 0$. Für $k < 0$ ist zusätzlich $kg := |k|(-g)$.

(ii) Ist G abelsch und $G \cong H$, dann ist H abelsch.

A75. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 14.12.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 18.12.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Es seien K ein Körper, $\lambda \in K$ und

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(K)$$

Geben Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$ an und beweisen Sie diese Formel für A^n durch vollständige Induktion über n.

Hinweis: Für die Formulierung der Lösung könnten z.B. *Binomialkoeffizienten* hilfreich sein.

A76. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 14.12.2017, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 18.12.2017, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel

(a) Überlegen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\varphi_i : G_i \to H_i$ Homomorphismen, Epimorphismen, Monomorphismen oder Isomorphismen zwischen den Gruppen G_i und H_i sind.

(i) $G_1 = (\mathbb{Q}, +)$, $H_1 = (\mathbb{Q}, +)$, $\varphi_1 : q \mapsto 5q$

(ii) $G_2 = (\mathbb{Q}, +)$, $H_2 = (\mathbb{Q}, +)$, $\varphi_2 : q \mapsto q^2$

(iii) $G_3 = (\mathbb{Q}^\times, \cdot)$, $H_3 = (\mathbb{Q}, +)$, $\varphi_3 : q \mapsto q - 1$

(iv) $G_4 = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H_4 = (\mathbb{Q}^\times, \cdot)$, $\varphi_4 : (a, b) \mapsto 2^a 3^b$

(b) Zeigen Sie $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \ncong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

(c) Zeigen Sie $(\mathbb{Z}, +) \ncong (\mathbb{Q}, +)$.

H77. (a) Es sei K ein Körper. Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$? Geben Sie jeweils einen Beweis an oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

(i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ii) $A^2 + B^2 = 0 \ \Rightarrow \ A = B = 0$

(iii) $BA = 0 \ \Rightarrow \ (AB)^2 = 0$

(b) Es seien K ein Körper, $m, n, r \in \mathbb{N}$ sowie $A \in \mathrm{Mat}_{m\times r}(K)$ $B \in \mathrm{Mat}_{r\times n}(K)$. (Das Matrixprodukt AB ist also definiert).

(i) Die dritte Spalte von B sei gleich der Summe der beiden ersten Spalten. Was lässt sich über die dritte Spalte von AB sagen? Warum?

(ii) Die zweite Spalte von B bestehe nur aus Nullen. Was lässt sich über die zweite Spalte von AB sagen? Warum?

H78. Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die *Spur* einer Matrix $A := (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist definiert als

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeigen Sie:

(a) $\forall \lambda, \mu \in K : \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \,\mathrm{tr}(A) + \mu \,\mathrm{tr}(B)$.

(b) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.