Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

11. Übungsblatt für die Übungen vom 18.12.2017-5.1.2018

Ringhomomorphismen, lineare Abbildungen

V79. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Es sei $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung mit $f(1,3) = (3,1)$ und $f(0,1) = (1,2)$. Warum ist f durch diese Festlegung eindeutig bestimmt?

(i) Bestimmen Sie $f(2,6)$, $f(0,3)$ und $f(2,7)$.

(ii) Bestimmen Sie Kern und Bild von f.

(b) Gibt es eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ mit $f(4,0) = (0,1,2)$, $f(1,1) = (2,2,1)$ und $f(1,2) = (3,2,0)$?

Ü80. (a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir $M(a,b) := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass die Menge

$$U = \{M(a,b) : \ a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$$

ein Unterring von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass U ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ ist.

(c) Zeigen Sie $M(0,1)^2 = -\mathbb{1}_2$.

(d) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{C} \to U$ mit $x + iy \mapsto M(x,y)$ ein Ringisomorphismus und ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist.

Ü81. Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen f_i auf den gegebenen K-Vektorräumen K-linear sind:

K beliebiger Körper, V beliebiger K-Vektorraum, $f_1 : V \times V \to V$ mit $f_1(x_1, x_2) := x_1$,
$K = \mathbb{C}$, $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ mit $f_2(x) := (x-2, x+1)$,
K beliebiger Körper, $f_3 : K[X] \to K[X]$ mit $f_3(g) := g(1)$,
$K = \mathbb{Q}$, $f_4 : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ mit $f_4(x_1, x_2, x_3) := (2x_1 + 2x_2, 3x_2 - 2x_3, 2x_3 - x_1)$,
$K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $f_5 : K^2 \to K^2$ mit $f_5(x_1, x_2) := (x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2)$.
K beliebiger Körper, $f_6 : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ mit $f_6(A) := \mathrm{tr}(A)$.

Bestimmen Sie von f_4 die Dimensionen von Kern und Bild. Ist f_4 injektiv bzw. surjektiv?

Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : K \to K$ genau dann K-linear ist, wenn es ein $\lambda \in K$ mit $\forall v \in K : f(v) = \lambda \cdot v$ gibt.

Ü82. Die Drehung $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ im Koordinatenursprung um einen Winkel α ist eine lineare Abbildung. Überprüfen Sie das! Man kann sich die Abbildung f_α so vorstellen, dass zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Punkt $f_\alpha(x)$ entsteht, indem man x gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α dreht.

(a) Bestimmen Sie (entsprechend LAAG III.4.5) eine Matrix D_α, so dass die Drehung f_α gemäß $f_\alpha : x \mapsto D_\alpha x$ beschrieben wird. Überlegen Sie dazu, was die Bilder der Elemente der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ sind, d.h. berechnen Sie $f_\alpha(\binom{0}{1})$ und $f_\alpha(\binom{1}{0})$.

(b) Bestimmen Sie $D_{\pi/4}$. Berechnen Sie die Bilder der Punkte $\binom{1}{0}, \binom{3}{0}, \binom{1}{2}, \binom{3}{2}, \binom{2}{3}$ und überzeugen Sie sich mit einer Skizze von der Richtigkeit Ihrer Rechnung.

(c) Zeigen Sie: Die Menge $\{D_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ bildet eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(d) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ \alpha \mapsto D_\alpha$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Ker}(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

A83. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 4.1.2018, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 8.1.2018, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel

Eine Abbildung $f \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ ist durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 2x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathrm{Im}(f)$ an und bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Ker}(f)$ und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Im}(f)$ und entscheiden Sie, ob f injektiv oder surjektiv ist.

A84. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 4.1.2018, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 8.1.2018, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel

Zeigen Sie: Im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K ist die formale Ableitung (siehe LAAG III.4.4(e))

$$' : K[X] \to K[X] \text{ mit } \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$$

ein K-Vektorraum-Endomorphismus. Beweisen Sie darüber hinaus: Hat K die Charakteristik 0, dann ist die Ableitung $'$ surjektiv, aber nicht injektiv.

H85. Beweisen Sie LAAG III.3.4:

Sind $f : R \to S$ und $g : S \to T$ Ringhomomorphismen, dann ist auch $g \circ f : R \to T$ ein Ringhomomorphismus.

H86. Verbinden Sie die Punkte der Ebene, deren Koordinaten durch die Spaltenvektoren der nachstehenden Matrix gegeben sind, in der Reihenfolge dieser Spalten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -1 & -11 & -11 & -8 & -9 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 8 & 11 & 11 & 1 & 4 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie ändert sich die Figur, wenn auf alle Spaltenvektoren die lineare Abbildung

$$f_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit der Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

angewendet wird?