TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

12. Übungsblatt für die Übungen vom 8.1.-12.1.2018

Koordinatenvektoren, darstellende Matrizen

V87. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass durch

$$f : K^3 \to K^2 \quad \text{mit} \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung gegeben ist. Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Geben Sie die Darstellungsmatrix bzgl. der Standardbasen von K^3 und K^2, den Kern und das Bild von f an. Liegt der Vektor $(0,-3,3)^t$ im Kern von f?

Ü88. Wir verdeutlichen uns die Zusammenhänge aus LAAG III 5.5: Es sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Weiterhin sei V_3 der 3-dimensionale K-Vektorraum $\mathcal{P}(D_3)$ mit $D_3 = \{1,2,3\}$ und $B = (v_1, v_2, v_3)$ sei die Basis, die aus den Vektoren $v_1 = D_3$, $v_2 = \{1,2\}$ und $v_3 = \{2,3\}$ besteht (vgl. Aufgaben Ü44 und Ü64).

(a) Bestimmen Sie $\Phi_B((1,1,1)^t)$ und $\Phi_B((1,0,1)^t)$.

(b) Es seien $w_1 = \{1,2,3\}$, $w_2 = \{2\}$ und $w_3 = \{1,3\}$. Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren $u_i = \Phi_B^{-1}(w_i)$.
Geben Sie alle Elemente der Unterräume $\operatorname{span}_K(w_1,w_2,w_3)$ bzw. $\operatorname{span}_K(u_1,u_2,u_3)$ an.

(c) Bearbeiten Sie Teil (b) für $w_i = \{i\}$ für $i \in \{1,2,3\}$.

(d) Wir betrachten nun analog den n-dimensionalen Vektorraum V_n mit der Grundmenge $D_n := \{1,\ldots,n\}$. Zeigen Sie, dass die Familie $B_1 = (\{1,\ldots,i\})_{i\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist. Zeigen Sie, dass die Familie

$$B_2 = (\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\},\{n,1\})$$

linear abhängig ist.

(e)* Es sei nun $D = \mathbb{N}$. Finden Sie eine Basis des K-Vektorraums $V = \{C \subseteq D : C \text{ endlich}\} \subseteq \mathcal{P}(D)$.

Ü89. Die Tupel $E := \mathcal{E}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ und $H = ((1,1,1),(1,2,1),(1,1,2))$ sind Basen des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$, $F := \mathcal{E}_2 = ((1,0),(0,1))$ und $G = ((1,1),(1,3))$ sind Basen des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen T_H^E und T_E^H und überprüfen Sie, dass diese Matrizen zueinander invers sind.

(b) Berechnen Sie für die durch $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$, $\quad (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$ gegebene lineare Abbildung f die Darstellungsmatrizen $M_F^E(f)$, $M_G^E(f)$, $M_F^H(f)$ und $M_G^H(f)$.

Ü90. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Eine *(allgemeine) Spiegelung* $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine lineare Abbildung, für die $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Genau dann ist s eine Spiegelung, wenn für die darstellende Matrix $M_B(s)$ zu einer beliebigen Basis B von $\mathbb{R}^n$ gilt: $(M_B(s))^{-1} = M_B(s)$.

(b)* Finden Sie alle Matrizen aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, die eine Spiegelung beschreiben. Überlegen Sie, inwieweit die Definition mit dem anschaulichen Begriff der Spiegelung übereinstimmt.

Hinweis: Oft wird bei einer Spiegelung zusätzlich gefordert, dass das Bild $s(U)$ einer Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$ „spiegelverkehrt" ist bzw. dass Längen und Winkel erhalten bleiben. Das lässt sich gut mit Hilfe von *Determinanten* bzw. *orthogonalen Abbildungen* erklären, die Sie später kennenlernen werden.

A91. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 11.1.2018, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 15.1.2018, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Eine *Projektion* $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine lineare Abbildung, für die $\pi \circ \pi = \pi$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Genau dann ist π eine Projektion, wenn für die darstellende Matrix $M_B(\pi)$ zu einer beliebigen Basis B von $\mathbb{R}^n$ gilt: $(M_B(\pi))^2 = M_B(\pi)$.

(b) Finden Sie alle Matrizen aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, die eine Projektion beschreiben. Überlegen Sie, inwieweit die Definition mit dem anschaulichen Begriff der Projektion übereinstimmt.

(c) Zeigen Sie: beschreibt die Matrix P eine Projektion, dann beschreibt $S = 2P - \mathbb{1}$ eine Spiegelung. Beschreibt S eine Spiegelung, dann beschreibt $\frac{1}{2}(S + \mathbb{1})$ eine Projektion.

(d) Beweisen Sie: Ist $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Projektion, dann gibt es eine Basis B von $\mathbb{R}^n$, so dass $M_B(\pi) = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ gilt (kanonische Form).
Hinweis: Konstruieren Sie B aus einer Basis von $\mathrm{Ker}(\pi)$ und einer Basis von $\mathrm{Im}(\pi)$.

A92. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 11.1.2018, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 15.1.2018, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Es sei $V = \mathbb{Q}[X]_{\leq 2}$. Dann ist $B = (b_1, b_2, b_3) = (1, 1 - X, 1 - X^2)$ eine Basis von V. Weiter sei $C = (v_1, v_2, v_3)$ gegeben durch

$$v_1 = b_1 + 3b_2 + 2b_3, \qquad v_2 = 2b_1 + 4b_2 + b_3, \qquad v_3 = -b_1 + b_2 + 4b_3.$$

(a) Zeigen Sie, dass C keine Basis von V ist.

(b) Erweitern Sie eine maximale linear unabhängige Teilfamilie von C zu einer Basis $\tilde{B}$ von V.

(c) Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T^B_{\tilde{B}}$ und $T^{\tilde{B}}_B$.

H93. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $f : R \to S$ ein Isomorphismus von Ringen R, S mit Einselement, dann gilt $f(R^\times) = S^\times$.

(b) Isomorphe Vektorräume haben die gleiche Dimension.

(c) Isomorphe Vektorräume besitzen isomorphe Automorphismengruppen.

Hinweis: Zeigen Sie dazu: Sind V und W Vektorräume über dem Körper K und $\varphi : V \to W$ ein Vektorraum-Isomorphismus, dann ist $\mathrm{Aut}(V) \to \mathrm{Aut}(W), \quad \sigma \mapsto \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ ein Isomorphismus der Automorphismengruppen.

H94. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume, $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $U = \mathrm{Ker}(f)$. Beweisen Sie: Für jedes $y \in W$ ist die *Faser* $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$ *von* f ein affiner Unterraum der Form $x + U$ für ein beliebiges $x \in f^{-1}(y)$.