Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

13. Übungsblatt für die Übungen vom 15.1.-19.1.2018

Quotientenräume, affine Räume, Rang

V95. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

In dieser Aufgabe verwenden wir die folgende Definition:

Ist K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $x+U$ ein affiner Unterraum von V, dann ist die *Dimension* von $x+U$ gleich der Dimension von U.

Es sei nun $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und V der K-Vektorraum K^2.

(a) Wie viele Untervektorräume der Dimension 1 hat V? Bestimmen Sie alle Untervektorräume der Dimension 1 und geben Sie sie elementweise an (am einfachsten geht das mit einer Skizze).

(b) Bestimmen Sie einen affinen Unterraum $G = x + U$ (mit $x \in V$ und U Untervektorraum von V) der Dimension 1, der die Elemente $(1,1)$ und $(2,0)$ enthält. Geben Sie alle Elemente von G an. Ist G eindeutig bestimmt?

(c) Skizzieren Sie die Elemente des Quotientenraums V/U.

(d) Wie viele affine Unterräume der Dimension 1 gibt es in V?

Ü96. Es seien V ein 5-dimensionaler K-Vektorraum und $B = (v_1, \ldots, v_5)$ eine Basis von V. Weiterhin seien $U := \operatorname{span}_K(v_1, v_2, v_3)$ und $\pi_U : V \to V/U$ der natürliche Homomorphismus.

(a) Begründen Sie, warum $B' := \big(\pi_U(v_4), \pi_U(v_5)\big)$ eine Basis von V/U ist und warum $\big(\pi_U(v_3), \pi_U(v_4)\big)$ keine Basis von V/U ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $M^B_{B'}(\pi_U)$.

Ü97. (a) Es sei B eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$. Die linearen Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $(i \in \{1,2\})$ seien durch folgende darstellende Matrizen gegeben:

$$M_B(f_1) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_B(f_2) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Führen Sie folgende Schritte für $i = 1$ und $i = 2$ durch:

- Bestimmen Sie den Spaltenraum $\operatorname{SR}(M_B(f_i))$ und ermitteln Sie den Rang von $M_B(f_i)$.
- Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $\operatorname{Ker}(f_i)$.
- Verifizieren Sie den Dimensionssatz.

(b) Es sei $f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ eine lineare Abbildung mit der darstellenden Matrix

$$M^{E_7}_{E_4}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\dim_K(\mathrm{Ker}(f))$ und $\dim_K(\mathrm{Im}(f))$.

Ü98. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U, W Untervektorräume von V.

(a) Die Einschränkung von π_W auf U ist die Abbildung $\pi_W|_U : U \to V/W,\ u \mapsto \pi_W(u)$. Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung.

(b) Folgern Sie mit dem Homomorphiesatz: $U/(U \cap W) \cong (U+W)/W$.

A99. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 18.1.2018, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 22.1.2018, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Gegeben sei die lineare Abbildung $f : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4 \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ durch die darstellende Matrix $M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Basis B von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$ und einer Basis C von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$.

(a) Bestimmen Sie den Rang und den Spaltenraum von $M_C^B(f)$.

(b) Bestimmen Sie (ohne Verwendung des Dimensionssatz LAAG III.7.13) die Dimension und eine Basis des Kerns von f.

(c) Verifizieren Sie den Dimensionssatz LAAG III.7.13.

A100. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 18.1.2018, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 22.1.2018, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel
Es seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Sind $A, B, S \in \mathrm{Mat}_n(K)$, S regulär und gilt $B = S^{-1}AS$, dann gilt $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$.
Hinweis: Verwenden Sie ggf. H78.

(b) Ist $\pi : V \to V$ eine Projektionsabbildung, d.h. eine lineare Abbildung mit $\pi \circ \pi = \pi$ (siehe A91), dann gilt für jede Basis B von V: $\mathrm{tr}(M_B(\pi)) = \mathrm{rk}(\pi)$.

H101. Es seien K ein Körper und V, W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *affin*, wenn es eine lineare Abbildung $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und ein $w \in W$ gibt, so dass für alle $v \in V$ die Beziehung $f(v) = g(v) + w$ gilt.

Zeigen Sie, dass das Inverse einer bijektiven affinen Abbildung wieder affin ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Aff}_K(V)$ der bijektiven affinen Abbildungen $f : V \to V$ mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

H102. Es sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, und V der K-Vektorraum K^n. Weiter seien $v_0, \ldots, v_k \in V$ (für $n \geq k \in \mathbb{N}$) so gegeben, dass es keinen affinen Unterraum $R \supseteq \{v_0, \ldots, v_k\}$ der Dimension $k-1$ gibt. Zeigen Sie: Es gibt genau einen affinen Unterraum $S \supseteq \{v_0, \ldots, v_k\}$ der Dimension k.

Welche Aussage aus der Schulmathematik wird durch obige Aussage verallgemeinert?