TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

14. Übungsblatt für die Übungen vom 22.1.-26.1.2018

lineare Gleichungssysteme, Matrixinvertierung

V103. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Auch wenn ein Ergebnis anders gefunden werden kann: Bitte lösen Sie die folgenden Aufgaben, in dem Sie ein lineares Gleichungssystem aufstellen und lösen!

(a) Peter ist doppelt so alt wie Max. Max ist 10 Jahre jünger als Bert. Zusammen zählen alle drei 86 Jahre. Wie alt sind Peter, Max und Bert?

(b) In einer demographischen Studie wurde festgestellt, dass in jedem Jahr 3% aller Bewohner von Musterstadt in das Umland ziehen, während 5% der Bewohner des Umlands nach Musterstadt ziehen. Im Jahr 2000 wohnten 200.000 Menschen in Musterstadt und 100.000 Menschen im Umland. Wie viele Personen bewohnten Musterstadt und sein Umland im Jahr

(a) 2001 (b) 2010 (c) 1999 (d) 1990

Hinweise: Um das Modell einfach zu halten, wurden weitere Einflüsse wie Geburten, Todesfälle und Migration ignoriert. Benutzen Sie die in der Lehrveranstaltung kennengelernten Methoden zur Lösung der Aufgabe. Sie dürfen ausnahmsweise elektronische Hilfsmittel verwenden.

Ü104. Es sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(K)$.

(a) Ist $Ax = b$ für alle $b \in K^3$ ein lösbares LGS?

(b) Existiert ein $b \in K^3$, so dass das LGS $Ax = b$ mehrere Lösungen hat?

(c) Sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Dimension des affinen Unterraums $\mathrm{L}(A, b)$.

(d) Lösen Sie das LGS $Ax = b$ für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ü105. (a) Gegeben sind die reellen Matrizen A_1, A_2 und die komplexe Matrix C. Untersuchen Sie, welche der Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix. Bestimmen Sie die zu den elementaren Zeilenumformungen gehörenden Elementarmatrizen und bilden Sie jeweils deren (umgekehrtes) Produkt.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1+2i & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_2\, x = b$ mit $b = (5, -11, 0)^t$

Ü106. Es sei V der $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$-Vektorraum $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]_{\leq 5}$. Für $f = \sum_{i=0}^{5} a_i X^i \in V$ bezeichnen wir mit $\sigma(f) := \sum_{i=0}^{5} a_i$ die Koeffizientensumme. Bestimmen Sie alle Elemente $f \in V$ mit $\sigma(f + 2f' + 4f'') = 0$ (wobei g' wie üblich die formale Ableitung von g bezeichnet).

A107. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 25.1.2018, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 29.1.2018, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel

(a) Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & a & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ und $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Finden Sie alle Werte für $a, b \in \mathbb{Q}$, für die das lineare Gleichungssystem $Ax = u$

(i) keine Lösung

(ii) genau eine Lösung

(iii) mehrere Lösungen

hat. Geben Sie die Lösungsmengen von (ii) und (iii) als affinen Unterraum, also in der Form $\mathrm{L}(A, u) = w + W$ (mit $w \in \mathbb{Q}^3$ und W Untervektorraum von $\mathbb{Q}^3$) an.

(b) Untersuchen Sie, ob die Lösungsmenge im Fall (iii) (mehrere Lösungen) einen Untervektorraum von $\mathbb{Q}^3$ bildet.

(c) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ sei durch die Vorschrift $f : x \mapsto Ax$ festgelegt. Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{Q}$ ist f injektiv?

A108. **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe) bis:**
Gruppen 1-4: 25.1.2018, 18:10 Uhr, Briefkasten C-Flügel oder helpdesk LAAG
Gruppen 5-7: 29.1.2018, 12:00 Uhr, Briefkasten C-Flügel

Es sei K ein Körper. Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i > j$ gilt.

(a) Formulieren Sie ein (notwendiges und hinreichendes) Kriterium für die Regularität (Invertierbarkeit) einer oberen Dreiecksmatrix.

(b) Zeigen Sie, dass die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass die Menge $L_{n,K} \subseteq \mathrm{Mat}_n(K)$ der n-reihigen oberen Dreiecksmatrizen über K ein Untervektorraum von $\mathrm{Mat}_n(K)$ ist. Bestimmen Sie seine Dimension und eine Basis. Zeigen Sie, dass $L_{n,K}$ ein Unterring von $\mathrm{Mat}_n(K)$ ist.

H109. (a) Es sei K ein beliebiger Körper mit Null- und Einselement 0 bzw. 1. Für welche $a \in K$ ist die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(K)$ invertierbar? Geben Sie die Inverse an.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in K$ (und von $a \in K$). Führen Sie die Probe durch!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, bei der Inversen A^{-1} den Faktor $(a(a-1))^{-1}$ auszuklammern.

H110. (a) Bestimmen Sie die Schnittgerade g der beiden Ebenen $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Beweisen Sie: Zwei 3-dimensionale Hyperebenen $F_1 \neq F_2$ des $\mathbb{R}^4$, die jeweils den Nullvektor enthalten, schneiden sich in einer zweidimensionalen Ebene.