TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Prof. Dr. A. Fehm, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Modul LAAG), Wintersemester 2017/18

15. Übungsblatt für die Übungen vom 29.1.-2.2.2018

Wiederholung

V111. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{Q})$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Zeigen Sie: Gilt $Ax = b$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$, dann existiert ein $x' \in \mathbb{Q}^n$ mit $Ax' = b$.

Hinweis: Sie sollen also zeigen, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann über $\mathbb{R}$ lösbar ist, wenn es über $\mathbb{Q}$ lösbar ist.

Die folgenden Aufgaben sind früheren Klausuren entnommen. Sie sollen der Vorbereitung auf die Prüfungsvorleistungs-Klausur am 5.2.2018 dienen. Bitte bereiten Sie die Aufgaben bereits vor der Übung vor!

Ü112. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

(a) Berechnen Sie die Determinante und den Rang von A.

(b) Begründen Sie, ob die Matrix A invertierbar ist; wenn ja, dann berechnen Sie die inverse Matrix von A.

Hinweis: Um Rechenfehler auszuschließen, können Sie zur Probe AA^{-1} berechnen; sie müssen das aber nicht.

(c) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathrm{L}(A, b)$ des Gleichungssystems $Ax = b$ für $b := (2, 1, 6, 3)^t$.

(d) Es sei $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis eines 4-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V, und $f : V \to V$ sei diejenige lineare Abbildung, für die $M_B^B(f) = A$ gilt. Bestimmen Sie einen Vektor $u \in V$ (als Linearkombination $\sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i$ der Basisvektoren), für den $f(u) = 2v_1 + v_2 + 6v_3 + 3v_4$ gilt. Begründen Sie, ob es einen oder mehrere solcher Vektoren u geben kann.

W113. Es sei $K := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. In dieser Aufgabe betrachten wir den K-Vektorraum $V := K^3$. Weiter seien $u = (1, 2, 3)^t$, $v = (2, 3, 4)^t$, $w = (0, 3, 1)^t$ Elemente von V.

(a) Geben Sie die Menge $\mathrm{span}_K(u)$ elementweise[1] an. Welche Dimension hat $\mathrm{span}_K(u)$?

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathrm{span}_K(u, v, w)$.

(c) Welche Untervektorräume von V enthalten die beiden Vektoren v und w?

(d) Beweisen Sie, dass $\mathrm{span}_K(u, v) \cap \mathrm{span}_K(v, w)$ ein Untervektorraum von V ist.

[1] D.h. geben Sie alle Elemente von V, die in $\mathrm{span}_K(u)$ enthalten sind, konkret an.

W114. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und

$$\Delta_n := \{\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) : \ a_1, \ldots, a_n \in K\} \subseteq \operatorname{Mat}_n(K)$$

die Menge aller n-reihigen Diagonalmatrizen über K. Weiter seien $+$ und $\cdot$ die Addition bzw. Multiplikation im Ring $\operatorname{Mat}_n(K)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\Delta_n, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall A, B \in \Delta_n : AB \in \Delta_n$ gilt, d.h. dass das Produkt zweier Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ist.

(c) Ist $(\Delta_n, +, \cdot)$ ein Ring bzw. ein Körper? Begründen Sie!

(d) Finden Sie (für jedes $n \in \mathbb{N}$) eine Menge $\tilde{\Delta}_n \subsetneq \Delta_n$, so dass $(\tilde{\Delta}_n, \cdot)$ eine Gruppe ist.

(e) Finden Sie einen Gruppenisomorphismus $\varphi : (\Delta_n, +) \to (K^n, +)$.

W115. Es sei $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$ und $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung.

(a) Begründen Sie, dass f nicht injektiv sein kann. Welche Dimension besitzt $\operatorname{Ker}(f)$ mindestens?

Im Folgenden seien einige Funktionswerte von f bekannt:

$$f(v_1) = (1, 0), \qquad f(v_2) = (1, 1), \qquad f(v_3) = (0, 1), \qquad f(v_4) = (0, 0) \tag{1}$$

(b) Bestimmen Sie $f(2v_1 + 3v_2)$. Warum ist f durch (1) eindeutig festgelegt?

(c) Mit E_2 sei die Standardbasis in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M^B_{E_2}(f)$. Begründen Sie, dass f keine Umkehrabbildung besitzt.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{Ker}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ jeweils durch Angabe einer Basis.

W116. Es sei V ein $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-Vektorraum und $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V.

(a) Wie viele Elemente besitzt V?

(b) Ist das Tripel $C = (c_1, c_2, c_3)$ mit

$$c_1 = b_1 + b_2 + 2b_3, \quad c_2 = 1b_1 + 4b_2 + 3b_3, \quad c_3 = 3b_1 + b_3$$

ebenfalls eine Basis von V?

(c) Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$f(b_1) = c_1, \quad f(b_2) = c_2, \quad f(b_3) = b_1.$$[2]

Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M^B_C(f)$ und $M^B_B(f)$. Besitzt f eine Umkehrabbildung? Begründen Sie!

W117. (a) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und E die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Weiter seien $B = (b_1, b_2, b_3)$ sowie $C = (c_1, c_2, c_3)$ zwei Basen von V mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen T^B_E, T^C_B und T^B_C.

[2] Hinweis: Kein Druckfehler

(b) Ein Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die darstellende Matrix

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_C^C(f)$.

(c) Bestimmen Sie für untenstehenden Vektor u den Koordinatenvektor $\Phi_B^{-1}(u)$ bzgl. B und berechnen Sie dessen Bild $\Phi_B^{-1}(f(u))$ unter f.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

W118. (a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

invertierbar ist. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A für $a = 4$.

(b) Es sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Verifizieren Sie, dass auch $C = (w_1, w_2, w_3)$ mit

$$w_1 = v_1 + 2v_2 + v_3, \qquad w_2 = 3v_1 + 7v_2 + 4v_3, \qquad w_3 = -v_1 + 4v_2 + 4v_3$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen T_C^B und T_B^C.

(d) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, für die $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, f(v_3) = v_1$ gilt. Begründen Sie, dass f durch diese Festlegung eindeutig bestimmt ist. Geben Sie die darstellenden Matrizen $M_C^B(f)$ und $M_B^B(f)$ an.

(e) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von f jeweils durch Angabe einer Basis.