TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

Probeklausur am 15.1.2020

Name, Vorname			Matrikelnr.	Unterschrift	
....			....	....	
Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Punktzahl	Note
25 Punkte	25 Punkte	25 Punkte	25 Punkte	100 Punkte	

1 Bestimmen Sie: (Rechenweg nicht erforderlich):

(a) $|\mathbb{Z}_7^2|$

(b) die komplexe Zahl $(1+i)(3-4i)$

(c) die Dimension des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{4\times 3}$

(d) eine lineare Abbildung f zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$

(e) Den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$

(f) Den Kern der Null-Abbildung $f : V \to W, v \mapsto o_W$ zwischen den K-Vektorräumen V und W

(g) Beweisen Sie:
Ist V ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$ linear unabhängig und $w \in V \setminus \mathrm{Lin}_V(B)$, dann ist $B \cup \{w\}$ linear unabhängig.

Die Lösungswege der folgenden Aufgaben sind lückenlos anzugeben.

2 Gegeben sei die folgenden Matrizen $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante des Produktes $B_1 \cdot B_2$ beider Matrizen. Schlussfolgern Sie, wie groß $\mathrm{rg}(B_1 \cdot B_2)$ ist.

(b) Wie viele Lösungen besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $B_1 x = o_{\mathbb{R}^4}$?

(c) B_1 und B_2 beschreiben (bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$) lineare Abbildungen $f_{B_1}, f_{B_2} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Es seien

$$b_1 = (1, -1, 2, -2) \in \mathbb{R}^4 \quad b_2 = (2, -2, 4, -4) \in \mathbb{R}^4$$

Bestimmen Sie das Bild von b_1 bezüglich der Abbildung f_{B_1} und alle Urbilder von b_2 bezüglich der Abbildung f_{B_2}.

Zusatz (+5) Es seien K ein Körper und $B_1, B_2 \in K^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass die Menge $X \subseteq K^n$ aller Elemente des K-Vektorraums K^n, die gleichzeitig die linearen Gleichungssysteme $B_1 x = o_{K^m}$ und $B_2 x = o_{K^m}$ lösen, einen Untervektorraum von K^n bildet.

3 Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_+$ und

$$\Delta_n := \{A = (a_{ij}) \in K^{n\times n} \mid \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : i \neq j \implies a_{ij} = 0\}$$

die Menge aller n-reihigen Diagonalmatrizen über K. Weiter seien $+$ und $\cdot$ die übliche Addition bzw. Multiplikation von $n \times n$-Matrizen über K.

(a) Zeigen Sie, dass $(\Delta_n, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall A, B \in \Delta_n : AB \in \Delta_n$ gilt, d.h. dass das Produkt zweier Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ist.

(c) Ist $(\Delta_n, +, \cdot)$ ein Körper? Begründen Sie!

Zusatz (+5) Finden Sie (für jedes $n \in \mathbb{N}_+$) eine Menge $\tilde{\Delta}_n \subsetneq \Delta_n$, so dass $(\tilde{\Delta}_n, \cdot)$ eine Gruppe ist.

4

(a) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und E die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Weiter seien $B = (b_1, b_2, b_3)$ sowie $C = (c_1, c_2, c_3)$ zwei Basen von V mit

$$\Phi_E^{-1}(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_E^{-1}(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_E^{-1}(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_E^{-1}(c_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Phi_E^{-1}(c_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Phi_E^{-1}(c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $M_E^B(\mathrm{id})$, $M_B^C(\mathrm{id})$ und $M_C^B(\mathrm{id})$.

(b) Ein Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_C^C(f)$.

(c) Berechnen Sie, für den Vektor $u = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, den Koordinatenvektor $\Phi_B^{-1}(u)$ bzgl. B sowie sein Bild $\Phi_B^{-1}(f(u))$ unter f: