TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

Lösungen für die Probeklausur vom 15.1.2020

Name, Vorname			Matrikelnr.	Unterschrift	
....			....	....	
Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Punktzahl	Note
25 Punkte	25 Punkte	25 Punkte	25 Punkte	100 Punkte	

1

(a) $|\mathbb{Z}_7^2|$ — 49

(b) die komplexe Zahl $(1+i)(3-4i)$ — $7-i$

(c) die Dimension des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{4\times 3}$ — 12

(d) eine lineare Abbildung f zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ — $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 0)$

(e) Den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$ — 1

(f) Den Kern der Null-Abbildung $f : V \to W, v \mapsto o_W$ zwischen den K-Vektorräumen V und W — V

(g) Beweisen Sie:
Ist V ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$ linear unabhängig und $w \in V \setminus \mathrm{Lin}_V(B)$, dann ist $B \cup \{w\}$ linear unabhängig.

Sei $\tilde{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$ eine beliebige endliche Teilmenge von B. Wir zeigen, dass $\tilde{B} \cup \{w\}$ linear unabhängig ist. (Dann ist nach VL auch $B \cup \{w\}$ linear unabhängig.).

Suche also Lösungen (für $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu \in K$) der Gleichung (*) $o = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \mu w$.

Wäre $\mu \neq 0$, dann könnte die Gleichung nach w umgestellt werden: $w = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{-\mu} b_i$. Dann würde, im Gegensatz zur Voraussetzung, $w \in \mathrm{Lin}_V(B)$ gelten.

Also ist $\mu = 0$ bzw. $o = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von B (und damit von $\tilde{B}$) folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, d.h. die Gleichung (*) hat nur die triviale Lösung, d.h. $\tilde{B} \cup \{w\}$ ist lin. unabhängig.

Die Lösungswege der folgenden Aufgaben sind lückenlos anzugeben.

2

(a) Bestimmung von $\det(B_1)$ mit dem Entwicklungssatz:

$$\det(B_1) \overset{\text{1.Spalte}}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{1. Zeile}}{=} -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot (6-4) = -2$$

Bestimmung von $\det(B_2)$ nach der Determinantenformel für Dreiecksmatrizen (oder mit Entwicklungssatz):

$\det(B_2) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Es folgt $\det(B_1 B_2) \overset{\text{Det.-mult.-satz}}{=} \det(B_1)\det(B_2) = -2$ und (wegen $\det(A) \neq 0 \iff A$ hat Vollrang): $\operatorname{rg}(B_1B_2) = 4$.

(b) Aus $\det(B_1) \neq 0$ folgt (nach VL) $\operatorname{rg}(B_1) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Damit hat das LGS $B_1 x = o_{\mathbb{R}^4}$ genau eine Lösung (nämlich den Nullvektor).

(c) Bild von b_1: $f_{B_1}(b_1) = B_1 b_1 = (-3, 2, -12, -5)^\top$,

Urbild von b_2: $f_{B_2}^{-1}(b_2) = \text{Lös}(B_2, b_2)$. B_2 liegt zwar nicht in ZSF vor, aber die Lösung kann dennoch abgelesen werden:

$$(B_2|b_2) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 3 & 1 & -4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow x_1 = 2 \\ \Longrightarrow x_2 = -2 - 3 \cdot 2 = -8 \\ \Longrightarrow x_3 = 4 - 9 \cdot 2 - 3 \cdot (-8) = 10 \\ \Longrightarrow x_4 = -4 - 9 \cdot (-8) - 3 \cdot 10 = 38 \end{array}$$

also $\text{Lös}(B_2, b_2) = (2, -8, 10, 38)^\top$.

(d) Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist nach VL ein Untervektorraum. Es folgt: $X = \text{Lös}(B_1, b_1) \cap \text{Lös}(B_2, b_2)$ ist Durchschnitt zweier Untervektorräume, also nach VL selbst ein Untervektorraum.

3

Es seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in \Delta_n$ beliebig. Zu einer beliebigen Matrix $M \in K^{n \times n}$ bezeichnen wir mit M_{ij} den Eintrag von M in Zeile i und Spalte j.

(a) Zu zeigen sind:

- Abgeschlossenheit: Für alle Zeilen- und Spaltenindices $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt nach Voraussetzung $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$. Also ist $A + B \in \Delta_n$.
- Assoziativität: Es gilt $A + (B + C) = (A + B) + C$, denn A, B, C sind ja Elemente von $K^{n \times n}$, in dem die (hier verwendete) Addition assoziativ ist.
- neutrales Element: Die Nullmatrix $O \in K^{n \times n}$ liegt in Δ_n und ist neutrales Element der Addition, denn für alle Zeilen- und Spaltenindices $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $(A+O)_{ij} = a_{ij} + O_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij} = \ldots = (O + A)_{ij}$, also $A + O = A = O + A$.
- inverse Elemente: Invers zu A ist die Matrix $-A := (-a_{ij})$, denn für alle Zeilen- und Spaltenindices $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $(A + (-A))_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0 = \ldots = (-A + A)_{ij}$, also $A + (-A) = -A + A = O$.

- Kommutativität: Es gilt $A+B=B+A$, denn A,B sind ja Elemente von $K^{n\times n}$, in dem die (hier verwendete) Addition kommutativ ist.

(b) Nach Def. der Matrixmultiplikation gilt für alle Zeilen- und Spaltenindices $i,j\in\{1,\dots,n\}$ mit $i\neq j$:
$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\overset{A\in\Delta_n}{=}a_{ii}b_{ij}\overset{B\in\Delta_n}{=}0$. Also ist $AB\in\Delta_n$.

(c) Für $n=1$ ist $\Delta_1\cong K$ mit dem Isomorphismus $(k)\mapsto k$ (denn für Addition und Multiplikation in Δ_1 gilt nach VL: $(k)+(l)=(k+l)$ und $(k)\cdot(l)=(kl)$). Damit ist Δ_1 ein Körper.

Für $n>1$ definiere die Matrix $X\in\Delta_n$ mit $X_{ij}=\begin{cases}1, & i=j=1\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$.

Dann gilt $\det(X)=0$, also hat (nach VL) X kein multiplikatives Inverses in $K^{n\times n}$ und erst recht nicht in $\Delta_n\subseteq K^{n\times n}$. Damit ist Δ_n kein Körper.

Zusatz (+5) Wähle $\tilde{\Delta}_n=\{E_n\}$, dabei sei E_n die n-reihige Einheitsmatrix. Dann ist $(\tilde{\Delta}_n,\cdot)$ eine einelementige Gruppe mit neutralem Element E_n.
[es gibt weitere Beispiele]

4

(a)
- $$M_E^B(\mathrm{id})=\begin{pmatrix}| & | & |\\ \Phi_E^{-1}(b_1) & \Phi_E^{-1}(b_2) & \Phi_E^{-1}(b_3)\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
- Wir finden
  $c_1=b_3=0\cdot b_1+0\cdot b_2+1\cdot b_3$,
  $c_2=b_3-b_1=-1\cdot b_1+0\cdot b_2+1\cdot b_3$,
  $c_3=b_3-b_2=0\cdot b_1-1\cdot b_2+1\cdot b_3$, also
  $$M_B^C(\mathrm{id})=\begin{pmatrix}| & | & |\\ \Phi_B^{-1}(c_1) & \Phi_B^{-1}(c_2) & \Phi_B^{-1}(c_3)\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$
- Schließlich ergibt sich
  $b_1=c_1-c_2=1\cdot c_1-1\cdot c_2+0\cdot c_3$,
  $b_2=c_1-c_3=1\cdot c_1+0\cdot c_2-1\cdot c_3$,
  $b_3=c_1=1\cdot c_1+0\cdot c_2+0\cdot c_3$, also
  $$M_C^B(\mathrm{id})=(M_B^C(\mathrm{id}))^{-1}=\begin{pmatrix}| & | & |\\ \Phi_C^{-1}(b_1) & \Phi_C^{-1}(b_2) & \Phi_C^{-1}(b_3)\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

(b) Nach Transformationsformel folgt:
$$M_C^C(f)=M_C^B(\mathrm{id})M_B^B(f)M_B^C(\mathrm{id})=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

(c) Koord-Vektor: $\Phi_B^{-1}(u)=(a,b,c)^\top$ mit $u=(1,0,1)=a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1)$. Scharfes Hinsehen ergibt $a=c=1$ und $b=-1$, denn $1\cdot(1,0,0)-1\cdot(1,1,0)+1\cdot(1,1,1)=(1,0,1)$. Es folgt $\Phi_B^{-1}(u)=(1,-1,1)^\top$.

[oder Bestimmung von $M_B^E(\mathrm{id}) = (M_E^B(\mathrm{id}))^{-1}$ und Berechnung von $\Phi_B^{-1}(u) = M_B^E(\mathrm{id}) \cdot \Phi_E^{-1}(u)$.]

Bild unter f: $\Phi_B^{-1}(f(u)) = M_B^B(f) \cdot \Phi_B^{-1}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$