



Lösungen für das 13. Übungsblatt  
Darstellungsmatrizen

N13.1 Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn

Wir überführen  $A|b$  zuerst in Zeilenstufenform:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & a & b & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} z_3 - 4z_1 \rightsquigarrow z_3 \\ z_2 + 2z_1 \rightsquigarrow z_2 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & a & b & 3 \end{array} \right) z_3 \rightsquigarrow z_2 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = 1 \\ \Rightarrow x_2 = \frac{3-bx_3}{a} = \frac{3-4b}{a} \\ \Rightarrow x_3 = 4 \end{array}$$

Wir lesen ab (\*\*): für  $a \neq 0$  hat  $A$  Vollrang (d.h.  $\text{rg}(A) = 3$ ). Für  $a = 0$  ergibt sich die ZSF:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) z_3 \rightsquigarrow z_2 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & b & 3 \end{array} \right) z_3 - bz_2 \rightsquigarrow z_3 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3-4b \end{array} \right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = 1 \\ \Rightarrow x_2 = t, x_3 = 4 \end{array}$$

Das bedeutet  $\text{rg}(A) = 2$  und  $\text{rg}(A|b) = \begin{cases} 2, & 3 - 4b = 0 \\ 3, & 3 - 4b \neq 0 \end{cases}$ .

Das ergibt (mit  $3 - 4b = 0 \iff b = \frac{3}{4}$ ) die folgenden Fälle:

- (a) (i) keine Lösung nach dem Lösbarkeitskriterium (VL 7.2) für  $a = 0, b \neq \frac{3}{4}$ .  
(ii) genau eine Lösung nach Eindeutigkeitskriterium (VL 7.3(II)) für  $\text{rg}(A) = 3$ , also für  $a \neq 0$ . Dann gilt  $\text{Lös}(A, u) = \{(1, \frac{3-4b}{a}, 4)^\top\}$ .  
(iii) mehrere Lösungen für den verbleibenden Fall  $a = 0, b = \frac{3}{4}$ . Dann ist nach Dimensionsformel (VL 5.13)  $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$  und  $(U := \text{Lös}(A, u) = \{(1, 0, 4)^\top + t(0, 1, 0)^\top \mid t \in \mathbb{R}\} = (1, 0, 4)^\top + \mathbb{R}(0, 1, 0)^\top$
- (b)  $U$  ist kein UVR, da  $o_{\mathbb{R}^3} \notin \text{Lös}(A, u)$ .
- (c)  $f$  injektiv  $\stackrel{\text{VL 5.7}}{\iff} \dim(\text{Ker}(f)) = 0 \stackrel{\text{VL 5.13}}{\iff} \text{rg}(f) = 3 \stackrel{\text{VL 6.11}}{\iff} \text{rg}(A) = 3 \stackrel{(**)}{\iff} a \neq 0$