Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

1. Übungsblatt für die Übungen vom 14.10.-18.10.2019

Wiederholung

Ziel dieser Übung ist es, dass Sie einige grundlegende mathematische Konzepte, die Sie in der Schule kennengelernt haben, wieder in ihr aktives Wissensreservoir transferieren.

Ü1.1 Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$\begin{array}{lll}
A &=& \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, \\
C &=& \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{0,1,2\} : \ x = 2^k\}, \\
E &=& \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ein Teiler von } 30\}, \\
G &=& F \cap C, \\
K &=& B \setminus A,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
B &=& \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 5\}, \\
D &=& \{x \in \mathbb{N} \mid \mid x - 2 \mid \leq 1\}, \\
F &=& \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 = 13\}, \\
H &=& A \cup B \cup E, \\
L &=& A \setminus B.
\end{array}$$

(a) Schreiben Sie die Mengen elementweise auf.

(b) Zeichnen Sie ein Mengen-Diagramm der Menge $\{A, B, C, D\}$.

(c) Geben Sie alle Teilmengenbeziehungen zwischen den Mengen an.

Ü1.2 Ein Gerät kann je nach Kombination der Baugruppen A, B, C, D in verschiedenen Varianten hergestellt werden. Dabei sind jedoch folgende Bedingungen sämtlich einzuhalten:

- Die Baugruppen A und D können, wenn überhaupt, nur gemeinsam auftreten.
- Der Einbau von D macht den Einbau von C erforderlich.
- Eine Variante, die A nicht enthält, muss B enthalten.
- B und D schließen sich gegenseitig aus.

Stellen Sie jede der vier Bedingungen als einen (möglichst einfachen) aussagenlogischen Term dar und ermitteln Sie alle möglichen Bauvarianten.

Ü1.3 Verneinen Sie folgende Aussagen:

- Es gibt Kurse, in denen jeder Student eine gute Note schaffen kann.
- $\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \ (|x| < y) \vee (y^2 - 2x^2 = 2)$.
- Zu jedem Mann gibt es mindestens eine Frau, die ihn nicht liebt.

Ü1.4 Analysieren Sie die beiden folgenden Behauptungen und ihre Beweise. Finden Sie den grundsätzlichen Fehler im Aufbau des ersten „Beweises“. Warum ist der zweite Beweis im Gegensatz zum ersten tatsächlich beweiskräftig?

<u>1. Behauptung:</u> Es gilt $1 = 2$.

<u>Beweis:</u> Es sei $1 = 2$.

Wir subtrahieren $3/2$ auf beiden Seiten und erhalten $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Nun quadrieren wir auf beiden Seiten: $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Dies ist eine wahre Aussage, damit ist die Behauptung richtig.

2. Behauptung: Für jede natürliche Zahl a gilt: $4|a \implies 4|a^2$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine natürliche Zahl b mit $4 \cdot b = a$.

Nun quadrieren wir auf beiden Seiten: $(4b)^2 = a^2$.

Wir klammern links eine 4 aus, also $4 \cdot 4b^2 = a^2$.

Da $4b^2$ wieder eine natürliche Zahl ist, folgt die Behauptung $4|a^2$.

Ü1.5 Über zwei Mengen A und B ist folgendes bekannt:

(i) $A \cup B = \{x^2 + y \mid x \in \{0,1,2\}, y \in \{0,1,2\}\}$

(ii) $|A| = |B| + 3$

(iii) $|A \cap B| = 2$

(iv) $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid n \text{ ist gerade}\}$

Dadurch sind die Mengen A und B jedoch noch nicht eindeutig festgelegt.

(1) Geben Sie alle möglichen Mengen B elementweise an, die obige vier Bedingungen erfüllen.

(2) Wie viele Mengenpaare A,B gibt es, die obige Bedingungen erfüllen?

Hinweis: Sie dürfen zur Lösung dieser Aufgabe die Gleichung $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ nutzen.