TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

2. Übungsblatt für die Übungen vom 21.10.-25.10.2019

Mengen

N2.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

(a) Gegeben seien die Mengen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x-5| \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 5 \leq 9\}$ und $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 > 3x^2\}$. Berechnen Sie

$$A \cup B, \quad A \cap C, \quad C \setminus A, \quad A \,\Delta\, B, \quad (A \setminus B) \setminus C \text{ und } A \setminus (B \setminus C).$$

(b) Ist die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : m > n \wedge (k \geq m \vee k \leq n)$ wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

V2.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Begründen Sie (vergleiche Vorlesung 1.3.): Sind A und B endliche Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = m$, dann gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ und $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Hinweis: Der Beweis der ersten Gleichung erfordert eigentlich einen Beweis durch *vollständige Induktion*, den sie möglicherweise noch nicht kennen. Deshalb ist lediglich eine Begründung der Aussage gefordert.

Ü2.3 (a) Geben Sie Beispiele von Mengen A, B, C, D an, für welche die Gleichung $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \cup D)$ verletzt ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Inklusion $(A \cup C) \setminus (B \cup D) \subseteq (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ stets richtig ist. Verwenden Sie nur Umformungsregeln, die Sie in Übung und Vorlesung kennengelernt haben!

Ü2.4 Oft werden in der Mengenlehre nur Teilmengen einer bestimmten Menge M (der sogenannten „Grundmenge") betrachtet. In diesem Fall wird für eine Menge $A \subseteq M$ üblicherweise $\overline{A}$ anstelle von $M \setminus A$ geschrieben.

Es seien A und B Teilmengen einer Grundmenge. Beweisen Sie die de Morganschen Regeln

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ und}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Ü2.5 Gegeben sind die Mengen $U_m = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m, \ n \text{ ungerade}\}$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$.
Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(U_m)|$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und geben Sie die Mengen $\mathcal{P}(U_0)$, $\mathcal{P}(U_1)$ und $\mathcal{P}(U_6)$ konkret an. Wie sieht $\mathcal{P}(\mathcal{P}(U_1))$ aus?

H2.6 (a) Beweisen Sie, dass die Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$ *assoziativ* sind, dass also

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \text{ und } (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

für alle Mengen X, Y, Z gelten.

(b) Beweisen Sie, dass die Mengenoperation $\cap$ distributiv über $\cup$ operiert, dass also

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

für alle Mengen X, Y, Z gilt. Beweisen Sie, dass analog $\cup$ distributiv über $\cap$ operiert.

H2.7 Es seien A und B endliche Mengen. Welche der Mengen $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ und $\mathcal{P}(A \times B)$ hat mehr Elemente? Begründen Sie!

H2.8 Es sei $A = \{a, b\}$ sowie $B = \mathcal{P}(A)$ und $C = \mathcal{P}(B)$. Geben Sie B elementweise an. Welche Aussagen sind wahr?

(i)	$\{a\} \in A$	(ii)	$\{a\} \in B$	(iii)	$\{a\} \in C$	(iv)	$\{\{a\}\} \subseteq B$
(v)	$\{\{a\}\} \in C$	(vi)	$\{\emptyset\} \subseteq A$	(vii)	$\{\emptyset\} \subseteq B$	(viii)	$\{\emptyset\} \subseteq C$