Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

3. Übungsblatt für die Übungen vom 28.10.-1.11.2019

Relationen und Abbildungen

N3.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

(a) Beweisen Sie: Sind A und B Mengen mit $A \subseteq B$, dann gelten die Gleichungen

$$A \cap B = A \text{ und } A \cup B = B.$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass folgende Gleichheiten für alle Mengen X,Y gelten:

$$X \cup (Y \cap X) = X = X \cap (Y \cup X)$$

V3.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Auf der Menge aller Menschen gibt es die (binären) Relationen „ist Mutter von“, „ist Schwester von“, „haben gemeinsame Vorfahren“, „kennt“, „ist befreundet mit“ , „ist verheiratet mit“.

Untersuchen Sie, welche der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation diese binären Relationen Ihrer Meinung nach besitzen. Fassen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

Ü3.3 Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R auf der jeweiligen Menge A Äquivalenzrelationen sind. Geben Sie für die Äquivalenzrelationen die Äquivalenzklassen an.

(a) A sei die Menge der Schüler einer Schule, zwei Schüler sind in Relation, wenn sie in die gleiche Klasse gehen.

(b) A sei die Menge der Schüler einer Schule, zwei Schüler sind in Relation, wenn sie in verschiedene Klassen gehen.

(c) A sei die Menge der Schüler einer Schule, zwei Schüler sind in Relation, wenn die Farben ihrer Pullover/Oberteile gleich sind.

(d) $A = \mathbb{R}\,, \quad R = \{(a, b) \in A \times A \mid \ |a - b| < \pi\}$,

(e) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}\,, \quad R = \Delta_A \cup \{(0, 2), (2, 0), (1, 3), (3, 1)\}$,

Ü3.4 Beschreiben Sie die folgenden Abbildungen in einer geeigneten Weise (Wertetabelle, Aufzeichnen im Koordinatensystem, . . .). Untersuchen Sie, ob die Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)$,

(b) $m_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + ax + b$. (für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$)

(c) $f_a : \{0, 1, \ldots , 9\} \to \{0, 1, \ldots , 9\}, \quad m \mapsto n \ :\Longleftrightarrow \ n$ ist die letzte Ziffer von $a \cdot m$ (für $a = 2$, $a = 3$ und $a = 4$),

(d) $g_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad z \mapsto a^z$ (für beliebiges $a \in \mathbb{N}$),

(e) $h_1 : X \to \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto \{x\}$ (für eine beliebige Menge X),

(f) $h_2 : X \to \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto X \setminus \{x\}$,

(g) $l : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

Ü3.5 Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist g surjektiv.

(d) Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist f injektiv.

Widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel): Ist $g \circ f$ bijektiv, dann sind f und g bijektiv.

H3.6 Geben Sie Beispiele für Relationen an, die zwei der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllen, nicht jedoch die dritte.

H3.7 Es seien R und S zwei Äquivalenzrelationen auf einer Menge A.

(a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $R \cap S$ wieder eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Beschreiben Sie anhand eines gängigen Beispieles für R und S, wie sich die Äquivalenzklassen durch die Durchschnittbildung verfeinern.

(c) Die Vereinigung $R \cup S$ ist i.a. keine Äquivalenzrelation. Geben Sie zwei Beispiele für R und S auf der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an, und zwar eins derart, dass $R \cup S$ eine Äquivalenzrelation ist, und eins so, dass $R \cup S$ keine Äquivalenzrelation ist.

H3.8 (a) Geben Sie alle Äquivalenzrelationen auf der Menge $A = \{a, b, c\}$ an.

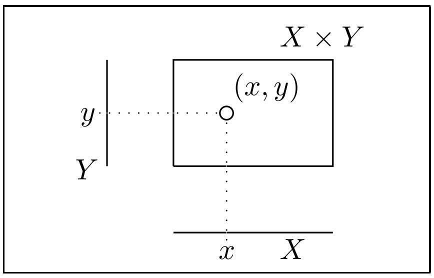
(b) Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer vier- bzw. fünfelementigen Menge?

Hinweis: Sie können ausnutzen, dass sich jede Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ durch ihre Äquivalenzklassen beschreiben lässt. Die Menge der Äquivalenzklassen $M/R := \{[m]_R \mid m \in M\}$ bildet eine Partition/Zerlegung von M.

H3.9 Das kartesische Produkt

$$X \times Y := \{(a, b) \mid a \in X \text{ und } b \in Y\}$$

zweier Mengen X und Y und deren Elemente $(x, y) \in X \times Y$ sollen wie in der Skizze dargestellt werden („Koordinatendarstellung“). Damit kann der Graph $f^\bullet := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ einer Abbildung $f : X \to Y$ skizziert werden.



Zeichnen Sie Diagramme von Graphen von Abbildungen f mit folgenden Eigenschaften:

(i) f surjektiv, aber nicht injektiv,

(ii) f injektiv, aber nicht surjektiv,

(iii) f bijektiv,

(iv) f konstant,

(v) f nicht surjektiv und nicht injektiv,

(vi) $X = Y$ und $f = \mathrm{id}_X$,

(vii) $\mathrm{im}(f) := \{f(x) \mid x \in X\}$ besteht aus genau zwei Elementen.