TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

5. Übungsblatt für die Übungen vom 11.11.-15.11.2019

Gruppen und Körper

N5.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für die Anzahl $d(n)$ der Diagonalen eines ebenen, konvexen n-Ecks gilt $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

Hinweis: Überlegen Sie zuerst geometrisch, wie Sie ein n-Eck aus einem $n+1$-Eck durch Streichen einer Ecke x und der Kanten von x zu seinen Nachbarecken y und z sowie Verbinden von y und z durch eine neue Kante konstruieren können und wie viele Diagonalen dabei verloren gehen.

V5.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Stellen Sie für $n \in \{5, 6, 7\}$ die Tafeln für Addition $x + y := (x + y \mod n)$ und Multiplikation $x \cdot y := (x \cdot y \mod n)$ in $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ auf. Begründen Sie (ohne detaillierten Beweis), dass $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ für $n \in \{5, 7\}$ jeweils die Körpereigenschaften erfüllt.
Warum trifft das für $n = 6$ nicht zu - welche Eigenschaft ist verletzt?

Ü5.3 (a) Zeigen Sie (vgl. VL 2.7), dass für $n \in \mathbb{N}_+$ und ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ durch die Festsetzung

$$x \equiv y \pmod n \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, \lambda \in \mathbb{Z} : x - y = \lambda n$$

eine Äquivalenzrelation $\equiv_n$ auf der Menge $\mathbb{Z}$ definiert wird.

Die Äquivalenzklassen $[x]_{\equiv_n}$ werden auch als *Restklassen* bezeichnet. Warum?

Was ist die Anzahl der (paarweise verschiedenen) Restklassen modulo n, d.h. die Mächtigkeit von $\mathbb{Z}/\!\equiv_n$?

(b) In der Menge $\mathbb{Z}/\!\equiv_n$ wird durch „repräsentantenweises“ Rechnen eine Addition $+$ bzw. Multiplikation $\cdot$ erklärt (vgl. VL 2.7). Rechtfertigen Sie diese Vorgehensweise durch den Nachweis, dass sie unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten ist. (Was muss dabei gezeigt werden?)

Ü5.4 $(K, +, \cdot)$ sei ein Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1. Beweisen Sie (vgl. VL 2.5):

(a) $\forall x, y \in K : xy = 0 \iff x = 0$ oder $y = 0$.

(b) $\forall x \in K : -(-x) = x$

(c) $(-1) \cdot (-1) = 1$

(d) $\forall x, y \in K : (-x) \cdot y = -(xy) = x \cdot (-y)$

(e) $\forall x, y \in K : (-x) \cdot (-y) = xy$

Ü5.5 (a) Es seien $z_1 = 2 + 5i$ und $z_2 = 3 + 3i$ komplexe Zahlen (vgl. VL 2.10).

(i) Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ und geben Sie das Ergebnis wieder in der in der Vorlesung verwendeten Schreibweise $a + bi$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) an.
Hinweis: Für Körper K und Elemente $x, y \in K$ schreiben wir $\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$.

(ii) Beweisen Sie: Für alle $a + bi \in \mathbb{C}$ gilt $(a + bi)(a - bi) \in \mathbb{R}$.
Hinweis: $(a - bi)$ heißt *konjugiert komplexe Zahl* zu $(a + bi)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Gruppentafel, dass die Menge $E_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\} \subseteq \mathbb{C}$ zusammen mit der Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine Gruppe bildet. Geben Sie zu jedem Element sein Inverses an.

H5.6 Es sei X eine endliche Menge der Mächtigkeit $|X| = n$. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X (vgl. VL 1.2) mit der symmetrischen Differenz $\triangle$ (vgl. VL 1.2) als Verknüpfung eine abelsche Gruppe bildet.

H5.7 Prüfen Sie, ob die folgende Menge mit den angegebenen zwei Operationen ein Körper ist:

$$(\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \text{ mit } a \oplus b := a + b - 1, \quad a \odot b := a + b - ab.$$

H5.8 Beweisen Sie (vgl. VL 2.7): ist X eine Menge und

$$\mathrm{Sym}(X) := \{f \mid f : X \to X \text{ bijektiv}\}$$

die Menge aller bijektiven Abbildungen von X nach X, dann ist $(\mathrm{Sym}(X), \circ)$ mit der Komposition (Hintereinanderausführung) $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe.