TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

6. Übungsblatt für die Übungen vom 18.11.-22.11.2019

Vektorräume

N6.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_2^n := \{0,1\}^n$ aller n-Tupel mit Einträgen aus $\mathbb{Z}_2$ (vgl. VL, Bsp.2.6) zusammen mit der Operation

$$+ : \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n \text{ mit } (a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n) := ((a_1+b_1 \mod 2),\dots,(a_n+b_n \mod 2))$$

eine abelsche Gruppe bildet.

V6.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Sind die folgenden Teilmengen Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie ihre Antworten mit VL, Def.3.7. Skizzieren Sie die angegebenen Mengen.

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y \geq 0\}$, (ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$,
(iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$, (iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$,
(v) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$, (vi) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$.

Ü6.3 Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen in einem Vektorraum V über K für alle $\lambda \in K$ und alle Vektoren $u \in V$ gelten:

(a) $\lambda \cdot u = 0 \iff \lambda = 0 \vee u = 0$ (vgl. VL, Lemma 3.6),
(b) $(-\lambda) \cdot (-u) = \lambda u$.

Ü6.4 Beweisen bzw.widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume sind:

(a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = 2c\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
(b) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
(c) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
(d) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = a \cdot b\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
(e) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \ f \text{ ist injektiv}\} \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$,
(f) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\} \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$,
(g) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$.
(h) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(2) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$.

Nach VL, Bsp.3.3 ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ist auch $\mathbb{Q}$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum?

Ü6.5 (a) Beweisen Sie VL, Lemma 3.11: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines Vektorraums V über einem Körper K, dann ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V.

(b) Beweisen Sie (vgl. VL, Bsp.3.13), dass die Vereinigung von $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Untervektorraum von U ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

H6.6 (a) Sei A eine Menge. Zeigen Sie (vgl. VL, Bsp.3.5), dass $(\mathcal{P}(A), \triangle, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ ist. Dabei sei die Vektorraumaddition durch die symmetrische Differenz $\triangle$ und die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{Z}_2$ durch $0 \cdot X := \emptyset$ und $1 \cdot X := X$ gegeben.

Hinweis: Sie können verwenden, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ eine abelsche Gruppe ist, siehe Ü5.6.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage: Für jede Teilmenge $B \subseteq A$ ist $\mathcal{P}(B)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{P}(A)$.

H6.7 Überprüfen Sie, ob die folgenden Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge V, einer Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ und einer Abbildung $\cdot : K \times V \to V$ (für einen Körper K) jeweils ein Vektorraum sind.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{Q}$, $\lambda \cdot x := \lambda + x - 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}$.

(b) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Z}$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{Z}$, $\cdot$ ist die übliche Multiplikation in $\mathbb{Q}$.

(c) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{R}$, $\lambda \cdot x := x$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$.

(d) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{R}$, $\lambda \cdot x := 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

(e) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $+$ ist die übliche Addition in $\mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot (x, y)$ ist der Punkt in $\mathbb{R}^2$, der sich durch Drehung von (x, y) um den Winkel λ um $(0, 0)$ im Uhrzeigersinn $(\lambda > 0)$ oder Gegenuhrzeigersinn $(\lambda < 0)$ ergibt.

H6.8 Beweisen Sie VL, Bsp.3.2: Ist K ein Körper, dann ist K^n ein K-Vektorraum.