TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

7. Übungsblatt für die Übungen vom 25.11.-29.11.2019

Linearkombination, lineare Hülle, lineare Unabhängigkeit

N7.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume der $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ sind:

(a) $U_1 := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 3a + 2b = c\}$,

(b) $U_2 := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 = c^2\}$,

(c) $U_3 := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)\}$,

(d) $U_4 := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}\colon\ f(x) = ax + b\}$.

V7.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

(a) Wie viele Elemente besitzt der $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $(\mathbb{Z}_2)^3$? Geben Sie alle Elemente an. Visualisieren Sie den Vektorraum durch einen Würfel.

(b) Es seien $v = (0, 1, 1)$ und $w = (1, 1, 1)$ zwei Vektoren aus $(\mathbb{Z}_2)^3$. Geben Sie alle Vektoren aus $\mathrm{Lin}(\{v, w\})$ an.

(c) Wie viele Untervektorräume hat der Vektorraum $(\mathbb{Z}_2)^3$? Begründen Sie! Geben Sie zu jeder auftretenden „Dimension“ ein Beispiel an.

(d) Geben Sie (mit Begründung) alle Vektoren $x \in (\mathbb{Z}_2)^3$ an, so dass das Tripel (v, w, x) linear unabhängig ist.

Hinweis: Unter dem Körper $\mathbb{Z}_2$ verstehen wir die Menge $\mathbb{Z}_2$ zusammen mit der Addition und Multiplikation modulo 2, vgl. VL 2.7.

Ü7.3 (a) Welche der folgenden Tupel von Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig? Geben Sie im Fall linearer Abhängigkeit eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors an (ggf. in Abhängigkeit von den Werten $a, b, c \in \mathbb{R}$).

(a1) $((2, 0), (1, 1), (0, 2))$, (a2) $((1, 1, 0), (2, 0, 2), (0, 2, 3))$,

(a3) $((1, b), (c, 1))$, (a4) $((2, -1, 1, 1), (-3, 2, -1, -3), (1, 1, 2, a))$.

(b) Die Vektoren a, b, c aus einem K-Vektorraum seien linear unabhängig. Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Vektoren ebenfalls linear unabhängig sind.

(b1) $(a - b, a + b)$, (b2) $(a - b, b + c, b - c)$,

(b3) $(a - b, a - c, b - c)$.

Ü7.4 (a) Gegeben ist die Menge $M := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \subseteq \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 := (1, 2, 1, 2), \qquad v_2 = (1, 1, 1, 1), \qquad v_3 = (0, 1, 1, 0)$$
$$v_4 := (0, 1, 0, 1), \qquad v_5 = (1, 0, 0, 1), \qquad v_6 = (1, 2, 2, 1)$$

Zeigen Sie, dass jeder Vektor v_i mit $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ in $\mathrm{Lin}(M \setminus \{v_i\})$ enthalten ist. Gilt $\mathrm{Lin}(v_2, v_5, v_6) = \mathrm{Lin}(v_3, v_5, v_6)$?

(b) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Gibt es eine reelle Zahl α, so dass sich der Vektor $u = (-7, 2, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ als reelle Linearkombination der Vektoren $w_1 = (-1, 4, 1) \in \mathbb{R}^3$ und $w_2 = (2, 5, 3) \in \mathbb{R}^3$ darstellen läßt?

Ü7.5 (a) Wann sind zwei Vektoren $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ linear abhängig im $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $\mathcal{P}(A)$ (siehe Aufgabe H5.6, H6.6)?

(b) Es seien $X, Y \in \mathcal{P}(A)$. Geben Sie alle Elemente von $\mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}_2}(X, Y)$ an. Welche Mächtigkeit hat $\mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}_2}(X, Y)$ in Abhängigkeit von X und Y?

H7.6 Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $x, v \in V$. Eine *Gerade* in V durch einen „Punkt“ x mit der „Richtung“ v ist ein Menge der Form $\{x + \lambda v \mid \lambda \in K\}$.

Zeigen Sie: Durch zwei nichtidentische „Punkte“ verläuft genau eine Gerade.

Zeigen Sie: Drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) liegen genau dann auf einer Geraden, wenn es Skalare $a, b, c \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich Null sind, gibt, so dass $au + bv + cw = o_{\mathbb{R}^n}$ und $a + b + c = 0$ gelten.

H7.7 Es seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind. Geben Sie je einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Gilt $v_4 = 3v_2 - v_3$, dann ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear abhängig.

(b) Gilt $v_3 = 0$, dann ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear abhängig.

(c) Ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig, dann ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear abhängig.

(d) Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig, dann ist (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig.

(e) Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear abhängig, dann ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig.

(f) Ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig, dann ist jeder Vektor v_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ Linearkombination der anderen Vektoren aus (v_1, v_2, v_3).

H7.8 Es sei V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Es sei $n \geq 2$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ genau dann linear abhängig, wenn (mindestens) ein Vektor v_i Linearkombination der anderen ist
(d.h. $\exists i \in \{1, \ldots, n\}\, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : v_i = \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j v_j$).

(b) Ein Vektor $v \in V$ ist genau dann linear abhängig, wenn er der Nullvektor o_V ist.

(c) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig. Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig.

Formulieren Sie die Beweise sorgfältig!