TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

8. Übungsblatt für die Übungen vom 2.12.-6.12.2019

Basis und Dimension

N8.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Die Ziffern Ihrer 7-stelligen Immatrikulationsnummer seien (von links nach rechts gelesen) die Zahlen $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$.

Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$(x_1, x_2, x_3), (x_4, a, x_5), (x_6, x_7, a) \in \mathbb{R}^3$$

linear abhängig bzw. linear unabhängig sind.

Machen Sie die Probe! (Nur dafür dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.)

V8.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Sei (b_1, b_2, b_3, b_4) eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^4$. Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 seien folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} v_1 &:= b_1 - 2b_2 + b_4, \\ v_2 &:= 2b_3 + 5b_4, \\ v_3 &:= -2b_1 + 4b_2 + 2b_3 + 3b_4. \end{aligned}$$

(a) Sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig?

(b) Geben Sie eine Basis für $U := \mathrm{Lin}_{\mathbb{Q}^4}(v_1, v_2, v_3)$ an. Welche Dimension hat U?

(c) Ergänzen Sie (mit Begründung!) die Basis aus (b) zu einer Basis von $\mathbb{Q}^4$ (vgl. VL 4.4(I)).

Ü8.3 Untersuchen Sie untenstehende Teilmengen U_i der K_i-Vektorräume V_i in folgender Weise:

- Prüfen Sie, ob U_i ein Unterraum von V_i ist.
- Geben Sie ggf. eine Basis B_i von U_i an und bestimmen Sie $\dim(U_i)$.
- Vervollständigen Sie ggf. B_i zu einer Basis C_i von V_i.

(a) $K_1 = \mathbb{R}, \quad V_1 = \mathbb{R}^2, \quad U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -3x_1\}$,

(b) $K_2 = \mathbb{C}, \quad V_2 = \mathbb{C}^3, \quad U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_3 = i \cdot x_1\}$,

(c) $K_3 = \mathbb{R}, \quad V_3 = \mathbb{R}^4, \quad U_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,

(d) $K_4 = \mathbb{R}, \quad V_4 = \mathbb{R}^3, \quad U_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + 1, x_2 = x_1^2\}$,

(e) $K_5 = \mathbb{Z}_5, \quad V_5 = \mathbb{Z}_5^3, \quad U_5 = \mathrm{Lin}((1, 2, 4), (3, 1, 2))$.

Ü8.4 Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $B \subseteq V$. Beweisen Sie VL 4.4(II):

Die Menge B ist genau dann eine Basis von V, wenn B ein minimales Erzeugendensystem ist (d.h. keine echte Teilmenge $B' \subset B$ ist ein Erzeugendensystem von V).

Ü8.5 (a) Wann besitzt ein Vektorraum genau eine Basis?

(b) Es seien K ein Körper und (v_1, v_2, v_3) eine Basis des K-Vektorraums V. Weiter sei $w = v_1 + v_2$. Geben Sie alle Basen an, die nur Elemente aus $\{v_1, v_2, v_3, w\}$ enthalten.

(c) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $B = (x_1, \ldots, x_n)$ (für ein $n \in \mathbb{N}$). Geben Sie eine Basis von V an, wenn V als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst wird.

(d) Es sei K ein endlicher Körper. Bestimmen Sie die Anzahl der Basen des Vektorraums K^n.

H8.6 Es sei V ein K-Vektorraum und $a, b, c \in V$. Weiter gelte

$$x = a + b, \quad y = a + c, \quad z = b + c.$$

Zeigen Sie, dass für $K = \mathbb{R}$ das Tripel (a, b, c) genau dann eine Basis von V ist, wenn (x, y, z) eine Basis von V ist.

Finden Sie einen Körper K, in dem obige Äquivalenz nicht gilt, d.h. finden Sie einen Körper K, einen K-Vektorraum V und $a, b, c \in V$, so dass (a, b, c) in V linear unabhängig ist, (x, y, z) jedoch nicht.

H8.7 Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (vgl. VL 3.4) nicht endlich-dimensional ist.

Hinweis: Finden Sie eine unendliche linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

H8.8 Es sei $|A| = n$. Welche Dimension hat der $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $\mathcal{P}(A)$ aus H6.6 ? Geben Sie eine Basis B an. Geben Sie eine weitere Basis B' an, die nicht die gleichen Elemente wie B enthält.