TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

9. Übungsblatt für die Übungen vom 9.12.-13.12.2019

lineare Abbildungen

N9.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Im $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $\mathbb{Z}_2^6$ definieren wir die Menge

$$X := \{(a_1, \ldots, a_6) \in \mathbb{Z}_2^6 \mid |\{i \in \{1, \ldots, 6\} \mid a_i = 1\}| = 2\}.$$

aller 6-Tupel, die an genau 2 Stellen eine 1 stehen haben.

(a) Sind X bzw. $Y := \mathrm{Lin}(X)$ Untervektorräume von $\mathbb{Z}_2^6$? Begründen Sie!

(b) Beweisen Sie, dass $Y = \{(a_1, \ldots, a_6) \in \mathbb{Z}_2^6 \mid \sum_{i=1}^6 a_i \equiv 0 \pmod 2\}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $B \subseteq X$ von Y. (Nutzen Sie den Basisauswahlsatz VL 4.4.(II)). Welche Dimension hat Y? Wie viele Elemente besitzt Y?

(d) Bestimmen Sie eine Basis C von Y mit $(1, 1, 1, 1, 1, 1) \in C$. (Nutzen Sie den Basisergänzungssatz VL 4.4.(I) oder andere geeignete Ergebnisse).

V9.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Es seien V und W ein K-Vektorräume über einem Körper K.

(a) Beweisen Sie VL 5.2(a): Die identische Abbildung $\mathrm{id}_V : V \to V, v \mapsto v$ ist eine lineare Abbildung.

(b) Beweisen Sie (vgl. VL 5.3): Die Nullabbildung $O : V \to W, v \mapsto o_W$ ist eine lineare Abbildung.

(c) Es sei nun $V = K$. Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f : K \to K$ genau denn eine lineare Abbildung ist, wenn es ein $\lambda \in K$ gibt, so dass $\forall v \in K : f(v) = \lambda v$ gilt.

Hinweis: Vergessen Sie keine der beiden Beweisrichtungen!

Ü9.3 (a) Bestimmen Sie die Dimension des von den Vektoren

$$u_1 = (1, 1, 0, 1), \quad u_2 = (3-4i, 1+i, 3+i, 2+4i), \quad u_3 = (-i, 0, 0, 1+i), \quad u_4 = (-i, 0, 1, 0)$$

erzeugten Untervektorraums $U = \mathrm{Lin}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^4$. Bestimmen Sie eine Basis B von U sowie ein lineares Komplement W zu U in $\mathbb{C}^4$.

(b) Es sei $U' := \mathrm{Lin}((0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$. Vollziehen Sie den Dimensionssatz VL 4.15 am Beispiel von U und U' nach, d.h. bestimmen Sie $\dim(U + U')$ und $\dim(U \cap U')$ und prüfen Sie, dass die Gleichung $\dim(U + U') = \dim(U) + \dim(U') - \dim(U \cap U')$ tatsächlich gilt.

Ü9.4 Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen f_i auf den gegebenen K-Vektorräumen linear sind:

(a) K, V beliebig, $f_1 : V \times V \to V$ mit $f_1(x_1, x_2) := x_1$,

(b) $K = \mathbb{C}$, $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ mit $f_2(x) := (x-2, x+1)$,

(c) $K = \mathbb{R}$, $f_3 : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(g) := g(1)$,

(d) $K = \mathbb{Q}$, $f_4 : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ mit $f_4(x_1, x_2, x_3) := (2x_1 + 2x_2, 3x_2 - 2x_3, 2x_3 - x_1)$,

(e) K beliebig, $f_5 : K \to K$ mit $f_5(x) := x^2$.

Bestimmen Sie die Dimensionen von $\mathrm{Ker}(f_4)$ und $\mathrm{Im}(f_4)$. Ist f_4 injektiv bzw. surjektiv? Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(f_4)$ und $\mathrm{Im}(f_4)$.

Ü9.5 Es seien U, V, W K-Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Beweisen Sie VL 5.2(b): Ist $g : U \to V$ ebenfalls linear, dann auch die Komposition $f \circ g : U \to W$.

Beweisen Sie: Ist T Untervektorraum von V, dann ist $f(T)$ Untervektorraum von W.

H9.6 (a) Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Untervektorräume U zu gegebenen Körpern K und K-Vektorräumen V. Bestimmen Sie außerdem jeweils ein lineares Komplement (vgl. VL 4.13) W zu U in V.

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathrm{Lin}((1,2,3),(1,0,0))$

(ii) $K = \mathbb{Z}_5$, $V = (\mathbb{Z}_5)^4$, $U = \mathrm{Lin}((1,3,4,0),(0,3,1,2),(2,0,1,1))$

(b) Es seien K ein Körper und U und W Untervektorräume des Vektorraums K^3. Weiter sei $K^3 = U \oplus W$. Zeigen Sie, dass dann $\dim_K(U) \neq \dim_K(W)$ gilt.

H9.7 Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \leq V$ mit $U_1 \oplus U_2 = V$. Für jedes $i \in \{1,2\}$ sei $\pi_i : V \to V$ die *Projektion* von V auf U_i, d.h. $\forall u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 : \pi_i(u_1 + u_2) = u_i$.

(a) Zeigen Sie, dass π_1 und π_2 lineare Abbildungen sind und $\mathrm{Im}(\pi_i) = U_i$ für $i \in \{1,2\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\pi_i^2 = \pi_i$ gilt.

H9.8 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine Menge mit n Elementen. Finden Sie einen Isomorphismus zwischen den Vektorräumen $(\mathcal{P}(A), \triangle, \cdot)$ (vgl. Aufgaben H5.6, H6.6, Ü7.5) und $(\mathbb{Z}_2^n, +, \cdot)$ (vgl. VL 3.2, Aufgabe N6.1).