TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

10. Übungsblatt für die Übungen vom 16.12.-20.12.2019

lineare Abbildungen, Koordinatenvektoren

N10.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3)$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Ker}(f)$ und $\dim \operatorname{Im}(f)$ und entscheiden Sie, ob f injektiv oder surjektiv ist.

(c) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\operatorname{Im}(f)$ an und bestimmen Sie $\operatorname{Ker}(f)$.

V10.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Es sei $W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = ax + b\}$. Gemäß N7.1(d) ist W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Beweisen Sie, dass $C = (f, g)$ mit $f := \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ eine geordnete Basis von W ist.

(b) Bestimmen Sie gemäß VL 5.9 zu den Tupeln $w_1 := (-1, 1), w_2 := (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ die Bilder $\Phi_C(w_1)$ bzw. $\Phi_C(w_2)$.

(c) Untersuchen Sie (nur mit Hilfe von) VL 5.9 bzw. 5.14, ob die lineare Abbildung Φ_C injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

(d) Beweisen Sie mit Hilfe der VL, dass $W \cong \mathbb{R}^2$ gilt.

(e) Es sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to W$ eine lineare Abbildung mit $\alpha(1, 0, 0) = f$, $\alpha(1, 1, 0) = g$, $\alpha(1, 1, 1) = h$ (mit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 4$). Warum ist α durch diese Festlegung eindeutig bestimmt (Hinweis: VL 5.12)? Berechnen Sie $\alpha(3, 2, 1)$. Begründen Sie mit VL 5.8, ob α injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

Ü10.3 Wir verdeutlichen uns die Zusammenhänge aus VL 5.9: Es sei $D_3 = \{1, 2, 3\}$ und $V_3 = (\mathcal{P}(D_3), \triangle, \cdot)$ ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum (der Dimension 3). Weiter sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V_3, die aus den Vektoren $v_1 = D_3$, $v_2 = \{1, 2\}$ und $v_3 = \{2, 3\}$ besteht (vgl. Aufgaben H6.6, Ü7.5 und H8.8).

(a) Bestimmen Sie $\Phi_B(1, 1, 1)$ und $\Phi_B(1, 0, 1)$.

(b) Es seien $w_1 = \{1, 2, 3\}$, $w_2 = \{2\}$ und $w_3 = \{1, 3\}$. Bestimmen Sie die Tupel $u_i = \Phi_B^{-1}(w_i)$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$.
Geben Sie alle Elemente der Unterräume $\mathrm{Lin}_{V_3}(w_1, w_2, w_3)$ bzw. $\mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}_2^3}(u_1, u_2, u_3)$ an.

(c) Bearbeiten Sie Teil (b) für $w_i := \{i\}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

(d) Wir betrachten nun analog den n-dimensionalen Vektorraum V_n mit der Grundmenge $D_n := \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass die Menge $B_1 = \{\{1, \ldots, i\} \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ linear unabhängig (und damit eine Basis) ist. Zeigen Sie, dass die Menge

$$B_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n - 1, n\}, \{n, 1\}\}$$

linear abhängig ist.

(e) Geben Sie einen Isomorphismus φ zwischen den $\mathbb{Z}_2$-Vektorräumen $\mathbb{Z}_2^n$ und V_n an. Ist φ eindeutig bestimmt?

Ü10.4 Zeigen Sie (vgl. VL 5.15): Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Sei $U \leq V$. Auf der Menge V ist durch

$$v \sim_U w \;:\Longleftrightarrow\; w - v \in U$$

eine Äquivalenzrelation $\sim_U \subseteq V \times V$ definiert.

Ü10.5 Es sei K ein Körper, $A \in K^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass durch $f_A : K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax$ eine lineare Abbildung definiert wird.

H10.6 Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W.

(a) Zeigen Sie: Das Bild $\varphi(g)$ einer Geraden $g \subseteq V$ ist wieder eine Gerade oder ein Punkt.
Hinweis: Eine Gerade g ist eine Menge der Form $v + Kw$ für $v, w \in V$. Mit $\varphi(g) := \{\varphi(x) \mid x \in g\}$ bezeichnen wir die Menge der Bilder der Elemente von g.

(b) Zwei Geraden $g := v_1 + Kw_1$ und $h := v_2 + Kw_2$ in V heißen *parallel* (wir schreiben $g \parallel h$), wenn für die Unterräume gilt: $Kw_1 = Kw_2$.
Zeigen Sie: φ erhält Parallelität, d.h. sind $g, h \subseteq V$ Geraden in V und $\varphi(g), \varphi(h) \subseteq W$ Geraden in W, dann folgt aus $g \parallel h$, dass $\varphi(g) \parallel \varphi(h)$ gilt.

H10.7 Fortsetzung von Ü10.3:

Es sei nun $D = \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $V := \{C \subseteq D \mid C \text{ endlich}\} \subseteq \mathcal{P}(D)$ ein Untervektorraum des $\mathbb{Z}_2$-Vektorraums $\mathcal{P}(D)$ ist und finden Sie eine Basis von V.