Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

11. Übungsblatt für die Übungen vom 6.1.-10.1.2020

Matrizen

N11.1 Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Gemäß VL 6.3 ist durch $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ eine lineare Abbildung definiert.

(a) Die Ziffern Ihrer 7-stelligen Immatrikulationsnummer seien (von links nach rechts gelesen) die Zahlen $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$.
Wählen Sie $a \coloneqq x_2$, $b \coloneqq x_3$, $c \coloneqq x_4$, $d \coloneqq x_5$ und überprüfen Sie, ob f_A für diese Wahl von A ein Isomorphismus ist.

(b) Finden Sie eine (notwendige und hinreichende) Bedingung an a, b, c, d, so dass f_A ein Isomorphismus ist.

V11.2 Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn

Gegeben seien die folgenden Matrizen (über dem Körper $\mathbb{R}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte mit zwei Faktoren.

Ü11.3 (a) Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen über $\mathbb{R}$. Dazu müssen Sie zuerst überlegen, welche Zeilen- und Spaltenanzahl X bzw. Y haben.

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B, C, D, F, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Geben Sie Bedingungen an, unter denen die folgenden Matrizengleichungen nach X aufgelöst werden können und geben Sie diese Lösung an.

$$\text{(i)} \quad XA + 2X = A, \qquad \text{(ii)} \quad (XB)^{-1}C + 2F = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n\times n}}.$$

Ü11.4 Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ eine Matrix. Finden Sie ein hinreichendes und notwendiges Kriterium, so dass A invertierbar ist. Geben Sie die inverse Matrix A^{-1} an.

Ü11.5 Beweisen Sie VL 6.5: Sei K ein Körper und $m, n, r, s \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

1) Matrixmultiplikation beschreibt Komposition linearer Abbildungen:
$f_{E_n} = \mathrm{id}_{K^n}$ und $\forall A \in K^{m\times n}\, \forall B \in K^{n\times r}\colon f_{AB} = f_A \circ f_B$.

2) Assoziativität der Matrixmultiplikation:
$\forall A \in K^{m\times n}\, \forall B \in K^{n\times r}\, \forall C \in K^{r\times s} : (AB)C = A(BC)$,

3) Einheitsmatrizen sind neutrale Elemente der Matrixmultiplikation:
$\forall A \in K^{m\times n}\colon E_m A = A = AE_n$

4) Distributivität der Matrixmultiplikation:
$\forall A, \tilde{A} \in K^{m\times n}, \forall B, \tilde{B} \in K^{n\times r} : A(B+\tilde{B}) = AB + A\tilde{B}$ und $(A+\tilde{A})B = AB + \tilde{A}B$.

Beweisen Sie VL 6.8(2): Sind $A, B \in K^{n\times n}$, dann gilt $AB = E_n \iff BA = E_n$.

H11.6 (a) Zeigen Sie VL 6.8(3): Für jede invertierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist A^{-1} invertierbar und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Beweisen Sie: $\forall A, B \in K^{m\times n}\colon (A+B)^\top = A^\top + B^\top$.

(c) Beweisen Sie: $\forall A \in K^{r\times m}\, \forall B \in K^{m\times n}\colon (AB)^\top = B^\top A^\top$.

(d) Beweisen Sie: für jede invertierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ gilt $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

H11.7 Es seien K ein Körper, $\lambda \in K$ und

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$$

Geben Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$ an und beweisen Sie diese Formel für A^n durch vollständige Induktion über n.

Hinweis: Für die Formulierung der Lösung könnten z.B. *Binomialkoeffizienten* hilfreich sein.

H11.8 (a) Es sei K ein Körper. Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n\times n}$? Geben Sie jeweils einen Beweis an oder finden Sie ein Gegenbeispiel:

(i) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

(ii) $A^2 + B^2 = \mathbf{0}_{K^{n\times n}} \Rightarrow A = B = \mathbf{0}_{K^{n\times n}}$

(iii) $BA = \mathbf{0}_{K^{n\times n}} \Rightarrow (AB)^2 = \mathbf{0}_{K^{n\times n}}$

(b) Es seien K ein Körper, $m, n, r \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{m\times r}$, $B \in K^{r\times n}$ (das Matrixprodukt AB ist also definiert).

(i) Die dritte Spalte von B sei gleich der Summe der beiden ersten Spalten. Was lässt sich über die dritte Spalte von AB sagen? Warum?

(ii) Die zweite Spalte von B bestehe nur aus Nullen. Was lässt sich über die zweite Spalte von AB sagen? Warum?

H11.9 Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die *Spur* einer Matrix $A := (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ ist definiert als

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) $\forall \lambda, \mu \in K : \operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$.

(b) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.