Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

12. Übungsblatt für die Übungen vom 13.1.-17.1.2020

Matrixinvertierung, lineare Gleichungssysteme

N12.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Es sei K ein Körper.

(a) Bestimmen Sie eine Basis B des K-Vektorraums $K^{m\times n}$ (vgl. VL 6.2) und ermitteln Sie seine Dimension.

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in K^{2\times 2}$ genau dann mit allen Matrizen $C \in K^{2\times 2}$ *kommutiert* (d.h. es gilt $AC = CA$), wenn $A = kE_2$ für ein $k \in K$ gilt.

Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass es keine weitere Matrix $\tilde{A}$ gibt, die mit allen $C \in K^{2\times 2}$ kommutiert! Multiplizieren Sie dazu z.B. $\tilde{A}$ nacheinander von links und von rechts mit allen Elementen einer Basis B von $K^{2\times 2}$.

(c)* **Zusatzaufgabe - wird nicht bewertet**
Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ genau dann mit allen Matrizen $C \in K^{n\times n}$ kommutiert, wenn $A = kE_n$ (für ein $k \in K$) gilt.

V12.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Bestimmen Sie die Inversen der Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{2\times 2}$ jeweils mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (VL 6.18) zur Matrixinvertierung. Vergleichen Sie Ihre Lösungen mit dem Ergebnis aus Aufgabe Ü11.4. Machen Sie zusätzlich die Probe, in dem Sie die Matrizen mit ihren jeweiligen Inversen multiplizieren.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Einträge von B^{-1} wieder Elemente aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sind.

Ü12.3 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Z}_5$.

(a) Bestimmen Sie den Rang von A und die Dimension des Spaltenraums von A.

(b) Geben Sie die Dimension und eine Basis des Kerns von A an.

(c) Vollziehen Sie die Dimensionsformel VL 5.13 am Beispiel von A nach.

(d) Wie viele Elemente hat $\mathrm{Ker}(A)$? Geben Sie alle Elemente an.

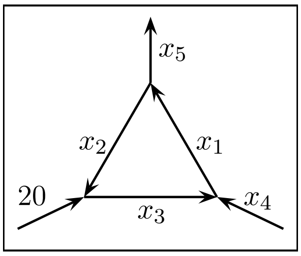
Ü12.4 Es sei K ein Körper. Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in K^{n\times n}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i > j$ gilt.

(a) Formulieren Sie ein (notwendiges und hinreichendes) Kriterium für die Regularität (Invertierbarkeit) einer oberen Dreiecksmatrix.

(b) Zeigen Sie: Das Produkt oberer Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere Dreiecksmatrix.

(c) Zeigen Sie: Das Inverse einer oberen Dreiecksmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrix.

Ü12.5 (a) Ermitteln Sie die Verkehrsströme in dem skizzierten „Kreisverkehr“.
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge. Benutzen Sie die gefundene Lösung, um herauszufinden, wie viele Fahrzeuge mindestens im Kreisverkehr unterwegs sind, d.h. bestimmen Sie eine nichtnegative Lösung, so dass $x_1 + x_2 + x_3$ minimal wird.



(b) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{R}$ in den Variablen x, y, z, das vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4, \\ -x + 2y &= 3, \\ 3x + 4y + \lambda z &= 11. \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix in Abhängigkeit von λ und bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

H12.6 Peter ist doppelt so alt wie Max. Max ist 10 Jahre jünger als Bert. Zusammen zählen alle drei 86 Jahre. Wie alt sind Peter, Max und Bert?

Hinweis: Auch wenn ein Ergebnis anders gefunden werden kann: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es! Schreiben Sie auch die Koeffizientenmatrix auf.

H12.7 Eine demographische Studie ergab, dass in jedem Jahr 3% der Bewohner von Musterstadt ins Umland ziehen, während 5% der Bewohner des Umlands nach Musterstadt ziehen. Im Jahr 2000 wohnten 200.000 Menschen in Musterstadt und 100.000 Menschen im Umland. Wie viele Personen bewohnten Musterstadt und sein Umland im Jahr

(a) 2001, (b) 2010, (c) 1999, (d) 1990?

Hinweise: Um das Modell einfach zu halten, wurden Geburten, Todesfälle und sonstige Migration ignoriert. Stellen Sie zur Modellierung ein lineares Gleichungssystem auf. Benutzen Sie die in der Lehrveranstaltung behandelten Methoden zur Lösung. Sie dürfen ausnahmsweise elektronische Hilfsmittel verwenden.

H12.8 (a) Für welche reellen Werte von r sind die folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ lösbar? Ermitteln Sie die Lösungsmenge. Machen Sie jeweils eine Probe!

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -x_1 - 2x_2 \phantom{{}-2x_3} &= 0 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= r \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= r \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -10 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + rx_3 &= 8 \end{aligned}$$

(b) Für welchen Wert für r besitzen die drei Geraden $x - 4y = -1$, $2x - y = 5$ und $-x - 3y = r$ einen gemeinsamen Schnittpunkt? Visualisieren Sie den Sachverhalt.

H12.9 (a) Es sei K ein beliebiger Körper mit Null- und Einselement 0 bzw. 1. Für welche $a \in K$ ist die folgende Matrix $A \in K^{3\times 3}$ invertierbar? Geben Sie die Inverse an.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in K$ (und von $a \in K$). Führen Sie die Probe durch!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, bei der Inversen A^{-1} den Faktor $(a(a-1))^{-1}$ auszuklammern.