TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

13. Übungsblatt für die Übungen vom 20.1.-24.1.2020

Darstellungsmatrizen

N13.1 Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn

(a) Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie alle Werte für $a, b \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem $Ax = u$

(i) keine Lösung,

(ii) genau eine Lösung,

(iii) mehrere Lösungen

hat. Geben Sie die Lösungsmengen von (ii) und (iii) in der Form $\text{Lös}(A, u) = w + W$ (mit $w \in \mathbb{R}^3$ und geeignetem Untervektorraum W von $\mathbb{R}^3$) an.

(b) Untersuchen Sie, ob die Lösungsmenge im Fall (iii) (mehrere Lösungen) einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ bildet.

(c) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Vorschrift $f : x \mapsto Ax$ festgelegt. Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist f injektiv?

V13.2 Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn

Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $B_1 = (b_{11}, b_{12}) = ((1, 1), (-1, 1))$ eine Basis von V. Weiter sei $B_2 = (b_{21}, b_{22})$ gegeben durch

$$b_{21} = 4b_{11} - 3b_{12}, \qquad b_{22} = 1b_{11} + 2b_{12}.$$

(a) Zeigen Sie, dass B_2 eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $T_{B_1}^{B_2}$ und $T_{B_2}^{B_1}$

(c) Berechnen Sie die Koordinaten von $v = 5b_{11} - b_{12}$ bezüglich der Basis B_2.

(d) Zeichnen Sie die Vektoren $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, v$ in ein Koordinatensystem bezüglich der Standardbasis E_2 des $\mathbb{R}^2$ ein. Verifizieren Sie graphisch die Koordinatenvektoren von v bezüglich E_2, B_1 und B_2.

Ü13.3 Die Drehung $d_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene (d.h. $\mathbb{R}^2$) um den Koordinatenursprung um einen Winkel α ist eine lineare Abbildung (das wird hier nicht gezeigt). Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ wird durch d_α gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung um den Winkel α gedreht.

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix $D_\alpha = M_{B_2}^{B_2}(d_\alpha)$ von d_α bezüglich der Standardbasis B_2 von $\mathbb{R}^2$ an. Bestimmen Sie die Inverse D_α^{-1}.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix einer Abbildung, die eine Drehung um $45°$ bewirkt. Berechnen Sie die Bilder der Punkte $(1, 0), (3, 0), (1, 2), (3, 2), (2, 3)$ und überzeugen Sie sich mit einer Skizze von der Richtigkeit Ihrer Rechnung.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$ gilt, d.h. dass die Hintereinanderausführung einer Drehung um α und einer Drehung um β eine Drehung um $\alpha + \beta$ ist.

Ü13.4 Es sei $B = (v_1, v_2)$ eine Basis eines zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Eine weitere Basis $C = (w_1, w_2)$ sei durch

$$w_1 = 2v_1 + v_2, \qquad w_2 = 3v_1 + 2v_2$$

gegeben. Geben Sie die Basiswechselmatrizen $M_B^C(\mathrm{id})$ und $M_C^B(\mathrm{id})$ an. Außerdem sei durch

$$f(v_1) = 2v_1 + v_2, \qquad f(v_2) = -v_1$$

eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : V \to W$ festgelegt. Wie lauten die Abbildungsmatrizen $M_B^B(f)$ bzw. $M_C^C(f)$ bzgl. obiger Basen? Nutzen Sie den Transformationssatz.

Ü13.5 Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und $A \in K^{n\times n}$. Weiter sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Untersuchen Sie, wann es eine Basis B in V gibt mit

(a) $M_B^B(f) = A$,

(b) $\exists B' : M_B^{B'}(f) = A$,

(c) $\exists B' : M_{B'}^B(f) = A$.

H13.6 Die Tupel $E = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ und $H = ((1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2))$ sind Basen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$, $F = ((1, 0), (0, 1))$ und $G = ((1, 1), (1, 3))$ sind Basen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen T_H^E und T_E^H und überprüfen Sie, dass diese Matrizen zueinander invers sind.

(b) Berechnen Sie für die durch $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z)$ gegebene lineare Abbildung f die Darstellungsmatrizen $M_F^E(f)$, $M_G^E(f)$, $M_F^H(f)$ und $M_G^H(f)$.

(c) Verifizieren Sie, dass durch jede der darstellenden Matrizen aus (b) tatsächlich der Vektor $(10, 9, 8)$ auf den Vektor $(19, 17)$ abgebildet wird.

H13.7 Beweisen Sie, dass die Drehung $d_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Koordinatenursprung um einen Winkel α (vgl. Aufgabe Ü13.3) eine lineare Abbildung ist.

Hinweis: Sie können z.B. nachweisen, dass $\Phi_{B_2}^{-1}(d_\alpha(x)) = D_\alpha \cdot \Phi_{B_2}^{-1}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt. Dazu können Sie x in Polarkoordinaten darstellen und die Additionstheoreme anwenden. Warum ist dann d_α linear?

H13.8 Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Eine *Projektion* $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine lineare Abbildung, für die $\pi \circ \pi = \pi$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Genau dann ist π eine Projektion, wenn für die darstellende Matrix $M_B(\pi)$ zu einer beliebigen Basis B von $\mathbb{R}^n$ gilt: $(M_B^B(\pi))^2 = M_B^B(\pi)$.

(b) Finden Sie alle Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$, die eine Projektion beschreiben. Überlegen Sie, inwieweit die Definition mit dem anschaulichen Begriff der Projektion übereinstimmt.

(c) Beweisen Sie: Ist $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Projektion, dann gibt es eine Basis B von $\mathbb{R}^n$ und ein $k \in \{0, \ldots, n\}$, so dass $(M_B^B(\pi))_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \wedge i \le k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ (kanonische Form).

Hinweis: Konstruieren Sie B aus einer Basis von $\mathrm{Ker}(\pi)$ und einer Basis von $\mathrm{Im}(\pi)$.