TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

14. Übungsblatt für die Übungen vom 27.1.-31.1.2020

Permutationen, Determinanten

N14.1 **Hausaufgabe (Nachbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Die Ziffern Ihrer 7-stelligen Immatrikulationsnummer seien (von links nach rechts gelesen) die Zahlen $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$. Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare Abbildungen mit $f(x_1, x_7) = (1, 0)$, $f(0, x_1) = (0, 1)$, $g(1, 0) = (x_3, x_6)$, $g(0, 1) = (x_4, x_5)$.

(a) Warum sind f und g dadurch eindeutig festgelegt? Ist $f \circ g$ ebenfalls eine lineare Abbildung?

Hinweis: Begründen Sie mit Hilfe geeigneter Aussagen aus der Vorlesung.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M^B_B(f)$, $M^B_B(g)$ und $M^B_B(f \circ g)$ bezüglich der Standardbasis B von $\mathbb{R}^2$.

(c) Ist die lineare Abbildung $f \circ g$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

(d) Bestimmen Sie das Bild des Quadrats mit den Eckpunkten $(1, 0), (2, 0), (1, 1), (2, 1)$ unter $f \circ g$.

(e) Bestimmen Sie das Urbild des Quadrats mit den Eckpunkten $(1, 0), (2, 0), (1, 1), (2, 1)$ unter $f \circ g$.

Veranschaulichen Sie die Abbildungen in einem Koordinatensystem.

V14.2 **Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabe vor Übungsbeginn**

Zeigen Sie, dass für alle Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$ aus $K^{n\times n}$ gilt:

$A \cdot B = B \cdot A \iff \det \begin{pmatrix} b & e \\ a-c & d-f \end{pmatrix} = 0.$

Ü14.3 Gegeben sind die Permutationen $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Permutationen $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, α^2, β^2, $\alpha^2 \circ \beta^2$, $(\alpha \circ \beta)^2$ sowie α^{-1}, β^{-1}, $\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$, $\beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$, $(\alpha \circ \beta)^{-1}$ und $(\beta \circ \alpha)^{-1}$ in Zyklenschreibweise. Bestimmen Sie das Signum aller Permutationen

Ü14.4 (a) Beweisen Sie: Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$ und $n \leq m$. Besteht die Permutation $\sigma \in S_m$ aus *einem* Zyklus der Länge n, dann ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-1}$.

(b) Beweisen Sie VL 9.4 (I): Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $\sigma \in S_n$, dann gilt: $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod\limits_{i<j} \dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Ü14.5 (a) Sei K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Zeigen Sie, dass die Determinantenfunktion mit $\det(A) := ad - bc$ die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) aus VL 9.6 besitzt.

(b) Beweisen Sie: Ist $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix (vgl. Ü12.4), dann gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

H14.6 (a) Welche der angegebenen Permutationen lassen sich durch geeignete Komposition der Permutationen (1234) und (12) aus S_4 erzeugen?

(i) (34) (ii) (123) (iii) (13)(24).

(b)* Zeigen Sie, dass sich (für $n \in \mathbb{N}_+$) jede Permutation $\gamma \in S_n$ durch die Transpositionen

$$\alpha_1 := (12), \alpha_2 := (23), \ldots, \alpha_{n-1} := (n-1, n)$$

erzeugen lässt.

Hinweis: Damit wird sichergestellt, dass der Sortieralgorithmus *bubble sort* immer terminiert. Zeigen Sie zuerst, dass jede Transposition, also jede Permutation der Form (j,k), $j,k \in \{1,\ldots,n\}$, aus den gegebenen Permutationen erzeugt werden kann. Konstruieren Sie danach einen Algorithmus, mit dem jede Permutation auf A durch eine Hintereinanderausführung von Transpositionen erzeugt wird.

H14.7 Bestimmen Sie die Determinanten aller Elementarmatrizen (siehe VL 6.14).

H14.8 (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine Matrix, in der in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Eintrag gleich 0 und jeder andere Eintrag gleich 1 ist. Bestimmen Sie den Betrag der Determinante von A.

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine Matrix mit $\det(B) \neq 0$, in der jeder Eintrag gleich 0 oder gleich 1 ist. Bestimmen Sie die maximale Anzahl an Nullen und die maximale Anzahl an Einsen, die in B vorkommen können.