TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Dr. Martin Schneider, Dr. Christian Zschalig

Lineare Algebra - Grundlegende Konzepte (Modul LA10), Wintersemester 2019/20

15. Übungsblatt für die Übungen vom 3.2.-7.2.2020

Determinanten

Ü15.1 Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A_1, A_2, A_3.

(b) Berechnen Sie die Determinanten von $A_1^\top$, $(A_1)^2$, A_2^{-1}, $2A_2$, $(A_1A_2)^{-1}$.

(c) Überführen Sie die Matrix B mittels elementarer Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix und ermitteln Sie deren Determinante.

(d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix C mit dem Entwicklungssatz.

Ü15.2 Zeigen Sie, dass für die *Vandermonde-Matrix* $V_3 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ die Gleichung

$\det(V_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ gilt.

Ü15.3 Es sei $n \in \mathbb{N}_+$, K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Determinantenfunktion:

(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(b) Ist B ähnlich zu A, dann gilt $\det(A) = \det(B)$.

(c) Verifizieren Sie, dass i.A. $\det(A) + \det(B) \neq \det(A + B)$ gilt.

(d) Mit $SL_n(K)$ wird die Menge aller $n \times n$-Matrizen über K bezeichnet, deren Determinante gleich 1 ist. Zeigen Sie, dass $(SL_n(K), \cdot)$ eine Gruppe ist.

H15.4 Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) durch Überführung in eine Zeilenstufenform,

(b) mit der Regel von Sarrus,

(c) mit Hilfe des Entwicklungssatzes.

H15.5 Beweisen Sie: Sind $v = (a, b)$ und $w = (c, d)$ zwei Elemente des $\mathbb{R}^2$, dann ist der Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms $P(v, w)$ gleich dem Betrag von $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, um den Flächeninhalt zu berechnen.

H15.6 Es seien $n \in \mathbb{N}_+, \lambda \in \mathbb{R}$ und $A(n, \lambda) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $a_{ij} := \begin{cases} \lambda, & i = j \\ 1, & |i - j| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(A(2, \lambda))$ und $\det(A(3, \lambda))$

(b) Bestimmen Sie $\det(A(2n + 1, 0))$.

(c) Bestimmen Sie $\det(A(n, 1))$.

(d)* Bestimmen Sie $\det(A(n, \lambda))$.

H15.7 Gibt es Matrizen $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit:

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BB^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CC^\top = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad DD^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Geben Sie Beispiele an bzw. begründen Sie, warum derartige Matrizen nicht existieren. Nutzen Sie dazu u.a. die Determinantenfunktion und deren Eigenschaften.