TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

9. Übungsblatt für die Übungen vom 12.12.-16.12.2016

chinesischer Restsatz, Gruppen

V61. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Gegeben sind 6 bijektive Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ $(i \in \{1,\ldots,6\})$ durch

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1-x,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{1-x},\ f_5(x) = \frac{x-1}{x},\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Stellen Sie die Verknüpfungstafel auf und begründen Sie, dass die Menge $\{f_i \mid i \in \{1,\ldots,6\}\}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen als Operation eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathbb{R} \setminus \{0,1\})$ bildet.

(b) Begründen Sie, dass die in (a) gefundene Gruppe nicht isomorph zu der Gruppe $(Z_6, +)$ (siehe Aufgabe Ü43) ist.

Ü62. Betrachtet wird die Gruppe $(G, \circ)$ mit $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ und der Operation

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \quad \text{f.a.}\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G,$$

mit den üblichen Additionen in $\mathbb{Z}_2$ bzw. $\mathbb{Z}_3$ in der 1. bzw. 2. Komponente.

(a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel der Gruppe $(G, \circ)$ auf. Welche Ordnungen haben die Elemente dieser Gruppe? Gibt es erzeugende Elemente für G, d.h. solche $(x, y) \in G$, für die $\langle (x, y) \rangle = G$ gilt?

(b) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_6, +)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ ist.

Ü63. Lösen Sie folgende Systeme von Kongruenzen:

(a)
$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x &\equiv 4 \pmod 5 \\ x &\equiv 6 \pmod 7 \\ x &\equiv 9 \pmod{11} \end{aligned}$$

Führen Sie jeweils die Probe durch!

Ü64. (a) Beweisen Sie: Es gibt - bis auf Isomorphie - genau zwei Gruppen der Ordnung 4.

Hinweis: Stellen Sie dazu alle möglichen Operationstafeln auf überprüfen Sie deren Isomorphien.

(b) Beweisen Sie: Ist p eine Primzahl, dann gibt es - bis auf Isomorphie - genau eine Gruppe der Ordnung p.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass eine solche Gruppe zyklisch ist.

A65. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 10. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer auf. Die (von links gelesen) 5. Ziffer sei die Zahl a, die 6. Ziffer b und die 7. Ziffer c.

Bestimmen Sie die Lösung des Kongruenzensystems

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod 5 \\ x &\equiv b \pmod 6 \\ x &\equiv c \pmod 7 \end{aligned}$$

H66. Sind zwei Gruppen isomorph, dann besitzen sie die gleiche Untergruppenstruktur. Zeigen Sie, dass die Gruppen

$$\text{(i) } \mathbb{Z}_8, \qquad \text{(ii) } \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \qquad \text{(iii) } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

nicht isomorph sind, in dem Sie folgende Schritte durchführen:

(a) Geben Sie die Gruppentafeln an.

(b) Bestimmen Sie alle von einem Element erzeugten (also zyklischen) Untergruppen.

(c) Begründen Sie anhand der in (b) gefundenen Ergebnisse, dass die Gruppen nicht isomorph sind.

(d)* Bestimmen Sie alle (d.h. nicht nur die einelementig erzeugten) Untergruppen der Gruppen.

Hinweis: Es gibt andere, i.A. schnellere Möglichkeiten, die Nicht-Isomorphie von Gruppen nachzuweisen, z.B. der Vergleich der Ordnungen der Elemente.

H67. Der heilige Kalender der Maya heißt *Tzolkin*. Jeder Tzolkintag ist durch eine Zahl zwischen 1 und 13 und einen der zwanzig Tagnamen (Imix, Ik, Akbal, Kan, Chicchan, Cimi, Manik, Lamat, Muluc, Oc, Chuen, Eb, Ben, Ix, Men, Cib, Caban, Edznab, Cauac, Ahau) gekennzeichnet. Nummern und Namen durchlaufen den Kalender unabhängig, der Beginn eines Zyklus sieht folgendermaßen aus:
1-Imix, 2-Ik, ..., 13-Ben, 1-Ix, 2-Men, ...
Der wievielte Tag ist 5-Oc?
zum Maya-Kalender siehe auch: `www.hermetic.ch/cal-stud/maya/contg.htm`