TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

10. Übungsblatt für die Übungen vom 19.12.2016-6.1.2017

Graphen

V68. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Sei X eine Menge, $\mathfrak{P}(X)$ deren Potenzmenge und $\binom{X}{i}$ die Menge aller i-elementigen Teilmengen von X. Schreiben Sie für die folgenden Graphen $G = (V, E)$ die Mengen V und E explizit auf und zeichnen Sie jeweils ein Graphendiagramm. Geben Sie die Grade der Knoten an und finden Sie in jedem Graphen einen Kreis der Länge 6.

(a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $V = \binom{X}{2}$, $E = \{\{A, B\} \mid A \neq B \wedge A \cap B \neq \emptyset\}$

(b) $X = \{1, 2, 3\}$, $V = \mathfrak{P}(X)$, $E = \{\{A, B\} \mid |(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = 1\}$

(c) $X = \{1, 2, 3\}$, $V = \mathfrak{P}(X)$, $E = \{\{A, B\} \mid |A \cup B| \nmid |A| + |B|\}$

Ü69. Die folgende Aufgabe stammt von Alkuin, einem Gelehrten am Hof Karls des Großen.
Ein Mann musste einen Fluss überqueren und einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl hinüberbringen. Er konnte nur ein Boot finden, das außer ihm lediglich eine dieser drei Sachen transportieren konnte. Alles sollte aber unbeschädigt herübergebracht werden (d.h. er durfte nicht den Wolf mit der Ziege bzw. die Ziege mit dem Kohl unbeaufsichtigt lassen). Wie kann er das tun?
Hinweis: Stellen Sie die Lösung in einem Graph dar, dessen Knoten die augenblicklichen Aufenthaltsorte von Schäfer, Wolf, Ziege und Kohl repräsentieren. Kanten zwischen Knoten treten genau dann auf, wenn zwei Zustände durch eine Bootsfahrt ineinander überführbar sind.

Ü70. Auf der Menge $\mathbb{Z}_{20}^* := \{n \in \mathbb{Z}_{20} \mid \mathrm{ggT}(n, 20) = 1\}$ sei eine Relation R wie folgt definiert:

$$(a, b) \in R \;:\Longleftrightarrow\; \mathrm{ggT}(a - b, 20) = 2.$$

(a) Geben Sie die Menge $\mathbb{Z}_{20}^*$ an.

(b) Schreiben Sie die Relation R als Menge von Paaren auf.

(c) Zeichnen Sie ein Diagramm des Graphen $G = (\mathbb{Z}_{20}^*, E)$ mit der Kantenmenge $E := \{\{a, b\} \mid (a, b) \in R\}$.

(d) Ist die Relation reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv? Wie können Sie das aus dem Graphen „ablesen“?

Ü71. Es sei $V_n = \mathfrak{P}\{1, \ldots, n\}$ und

$$R_n := \{(A, B) \mid A \subseteq B \;\wedge\; |B \setminus A| = 1 \;\wedge\; \max B > \max A\}.$$

Dabei soll $\max \emptyset = 0$ gelten.

Zeichnen Sie den Graphen (V_n, E_n) für $E_n := \{\{A, B\} \mid (A, B) \in R_n \;\vee\; (B, A) \in R_n\}$ für $n = 2$ und $n = 3$. Beweisen Sie, dass der Graph (V_n, E_n) für beliebige $n \in \mathbb{N}$ ein Baum ist.

A72. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 11. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Lässt man über eine geeignete Anordnung von 2^n Bits ein „Ablesefenster“ der Länge n laufen, das je n aufeinanderfolgende Bits herausgreift, dann erhält man einen *Kettencode* der Wortlänge n.
Finden Sie einen Kettencode der Wortlänge 3, bei dem im Ablesefenster die Zahlen $0, \ldots, 7$ in Binärdarstellung erscheinen.
Finden Sie einen Kettencode der Wortlänge 4, bei dem im Ablesefenster die Zahlen $0, \ldots, 15$ in Binärdarstellung erscheinen.

Hinweis: Betrachten Sie die Wörter als Knoten eines Graphen, die (gerichteten) Kanten existieren zwischen zwei Knoten v_1, v_2 genau dann, wenn das Wort v_2 aus dem Wort v_1 durch einmaliges Rechtsschieben des Ablesefensters erreichbar ist.

$$\overbrace{1\;0\;1\;1\;0\;0\;1\;\underbrace{\boxed{1\;1\;0\;0}}_{\text{Ablesefenster der Länge } n}\;0\;1\;1\;1\;1}^{\text{Bitfolge der Länge } 2^n}$$

H73. Bei der von der UEFA ausgetragene Europa League fand in den Spielzeiten 2004/05 bis 2008/09 eine Gruppenphase statt, bei der Gruppen von $n = 5$ Mannschaften gebildet und jede Mannschaft einmal gegen jede andere spielte. Wie viele Spieltage sind dafür mindestens zu veranschlagen? Finden Sie auch Lösungen für $n = 6$ und $n = 7$.

Hinweis: Modellieren Sie das Problem durch einen vollständigen Graphen. Die Lösung besteht aus einer Menge von Kantenpaaren, die jeweils keinen gemeinsamen Knoten haben.

H74. Für zwei natürliche Zahlen $k, n \geq 1$ sei $X = \{1, 2, \ldots, 2n + k\}$ und $V = \binom{X}{n}$, die Menge der n-elementigen Teilmengen von X. Der Graph $G_{n,k}$ besitzt V als Knotenmenge. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn es disjunkte Mengen sind.

(a) Geben Sie die Knoten- und Kantenmengen der Graphen $G_{1,2}$ und $G_{2,1}$ explizit an und zeichnen Sie jeweils ein Diagramm.

(b)* Bestimmen Sie für die Graphen $G_{2,2}$ und $G_{3,1}$ die Anzahl der Knoten und Kanten, ohne ein Diagramm zu zeichnen.