

## 11. Übungsblatt für die Übungen vom 9.1.-13.1.2017

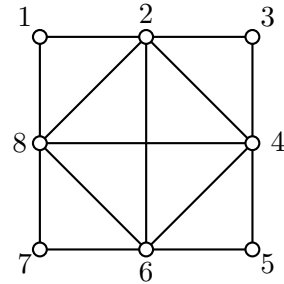
### Graphen: Planarität, Isomorphie, Algorithmen

#### V75. Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

In der nebenstehenden Abbildung ist das Diagramm eines Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  gegeben. Für den Graphen  $G_2 = (V_2, E_2)$  gelte:

$$V_1 = V_2 \quad \text{und}$$

$$\{x, y\} \in E_2 \iff \{x, y\} \notin E_1 \text{ für alle } x, y \in V_2 \quad (x \neq y)$$



Zeichnen Sie ein ebenes Diagramm des Graphen  $G_2$ . Begründen Sie, dass  $G_1$  und  $G_2$  isomorphe Graphen sind.

Ü76. Geben Sie bis auf Isomorphie alle Graphen  $G = (V, E)$  an, für die  $|V| = 3$  bzw.  $|V| = 4$  gilt.

Geben Sie bis auf Isomorphie alle möglichen Diagramme von Bäumen  $T = (V, E)$  an, für die  $|V| + |E| = 11$  gilt.

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Bäume mit 7 Knoten, bei denen kein Knoten den Grad 2 hat.

Ü77. (a) Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel, dass der Petersen-Graph nicht planar ist.

(b) Beweisen Sie: Jeder planare Graph enthält einen Knoten vom Grad kleiner gleich 5.

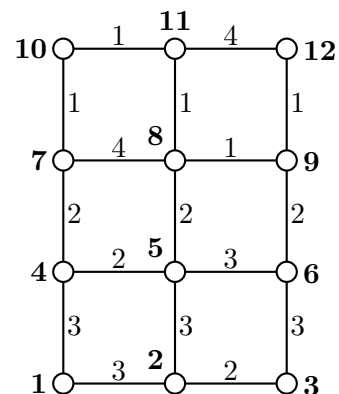
(c) Wie viele Kanten hat ein nichtplanarer Graph mindestens?

Ü78. Gegeben sei der rechts stehende gewichtete Graph  $G$ .

(a) Bestimmen Sie einen kürzesten Weg zwischen den Knoten 1 und 12 mit dem Dijkstra-Algorithmus.

(b) Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum  $T$  mit dem Kruskal-Algorithmus.

(c) Bestimmen Sie den Prüfer-Code von  $T$  (die Kantengewichte spielen hier keine Rolle mehr). Machen Sie die Probe, in dem Sie aus dem Prüfer-Code wieder den Baum generieren.



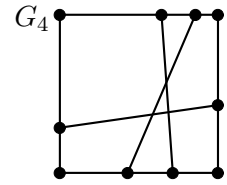
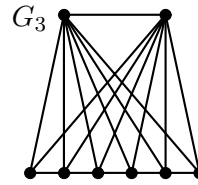
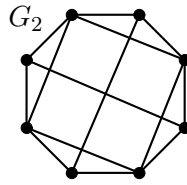
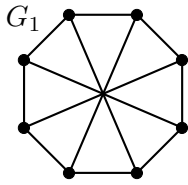
A79. Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 12. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.

- (a) Schreiben Sie Ihre (siebenstellige) Matrikelnummer  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$  auf. Schreiben Sie die erste Ziffer ihrer Matrikelnummer nochmals an das Ende, Sie erhalten die Nummer

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_1.$$

Fassen Sie diese Ziffernfolge als Prüfer-Code eines Baumes  $T = (V, E)$  mit der Knotenmenge  $V = \{0, 1, \dots, 9\}$  auf. Bestimmen Sie den zugehörigen Baum. Machen Sie die Probe, in dem Sie aus dem Baum wieder den Prüfer-Code generieren.

- (b) Welche der folgenden, durch unbeschriftete Diagramme gegebenen Graphen sind planar? Geben Sie entweder ein ebenes Diagramm an oder eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$ , die der Graph als Untergraph enthält.



H80\*. Finden Sie bis auf Isomorphie alle nichtplanaren Graphen mit höchstens 6 Knoten.

H81. Die Oberfläche eines Fußballs ist aus Fünfecken und Sechsecken zusammengesetzt, sie kann durch ein ebenes Graphendiagramm mit 60 Knoten dargestellt werden, in dem sich in jedem Knoten genau zwei Sechsecke und ein Fünfeck treffen.

- (a) Berechnen Sie die Kantenanzahl des zugehörigen Graphen und bestimmen Sie die Anzahl der Fünfeckflächen und der Sechseckflächen in einem zugehörigen ebenen Diagramm.
- (b)\* Zeichnen Sie ein ebenes Diagramm des Fußballs.
- (c) Ist es möglich, dass die Oberfläche des Fußballs nur aus Fünfecken bzw. nur aus Sechsecken besteht, wenn in jeder Ecke nur genau drei Flächen zusammentreffen?