TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

12. Übungsblatt für die Übungen vom 16.1.-20.1.2017

Graphen: Euler-Wege, Adjazenzmatrizen, Flüsse

V82. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Finden Sie für jeden *platonischen Körper* (siehe VL nach Satz 6.8) einen Euler-Kreis oder begründen Sie, warum ein solcher nicht existieren kann.

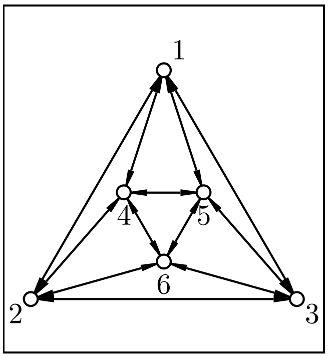
Ü83. (a) Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix A des rechts stehenden Graphen $G = (V, E)$.

(b) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{spur}(A^2) = 2|E|$ gilt.

(c) Ermitteln Sie $\operatorname{spur}(A^3)$ und begründen Sie, dass dies gleich der sechsfachen Anzahl der Dreiecke in A ist.

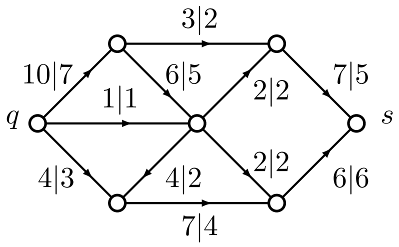
(d) Ist analog $\operatorname{spur}(A^4)$ gleich der achtfachen Anzahl der Vierecke von A? Ermitteln Sie die Anzahl der Vierecke von G, die den Knoten 1 enthalten.

(e) Zu welchem platonischen Körper ist G isomorph?

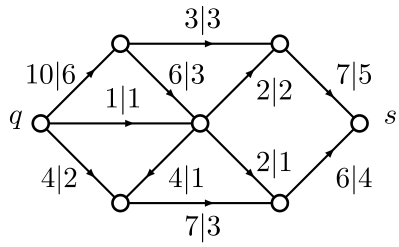


Hinweis: Die *Spur* einer quadratischen Matrix $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Summe der Diagonalelemente; es gilt also $\operatorname{spur}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

Ü84. (a) Gegeben ist ein Transportnetz (V, E, q, s, wt) mit zwei verschiedenen Kantenbewertungen $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (im Graphen sind an jeder Kante $e \in E$ zwei Zahlen n, m durch $n|m$ angetragen, dabei ist $n = wt(e)$ und $m = f_1(e)$ bzw. $m = f_2(e)$):



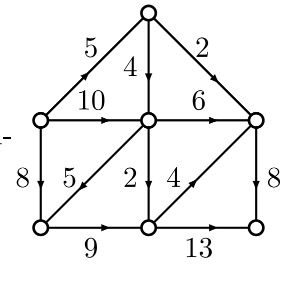
Kantenbewertung f_1



Kantenbewertung f_2

Prüfen Sie für beide Kantenbewertungen, ob sie Flüsse auf dem Transportnetz sind. Ist das der Fall, so bestimmen Sie die Flussstärke.

(b) Bestimmen Sie für das nebenstehende Transportnetz:
- die Quelle und die Senke,
- einen maximalen Fluss mittels Ford-Fulkerson-Algorithmus,
- einen minimalen Schnitt.

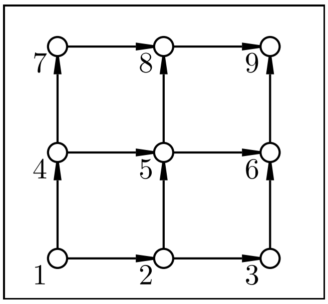


Ü85. Es sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph (mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$) und A seine Adjazenzmatrix. Weiter seien $B, C \in \{0,1\}^{n \times m}$ die *Inzidenzmatrizen* bzgl. Start- und Endknoten von G, d.h. es gilt

$$B_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma(e_j) = v_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und } C_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \tau(e_j) = v_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei sei $\sigma(e)$ der Startknoten einer Kante e und $\tau(e)$ ihr Endknoten. Zeigen Sie, dass dann $BC^\top = A$ gilt.

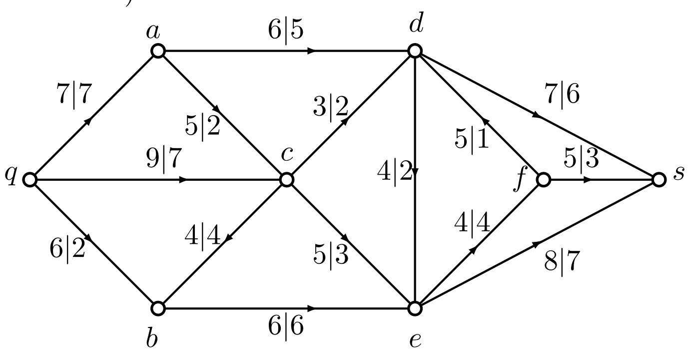
A86. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 13. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**



(a) Finden Sie alle kürzesten Wege vom Knoten 1 zum Knoten 9 in dem (durch ein Diagramm gegebenen) rechts stehenden Graphen G.
Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix A von G. Berechnen Sie eine geeignete (Begründung!) Potenz von A (Sie müssen nicht alle Einträge ausrechnen) und lesen Sie das Ergebnis ab.
Markieren Sie alle diese Wege geeignet in dem Diagramm.

(b) Für welche $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ gibt es im vollständig bipartiten Graphen $K_{m,n}$ einen Eulerkreis bzw. einen Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort!

H87. (a) Zeigen Sie, dass die Kantenbewertung f auf dem dargestellten Transportnetz (V, E, q, s, wt) ein Fluss ist, und berechnen Sie dessen Stärke (die an den Kanten durch $n|m$ angetragenen Zahlen n, m geben die Kapazität n und den Wert m des Flusses entlang der Kante an).



(b) Für das Transportnetz aus (a) wird die Partitionierung $V = M \mathbin{\dot\cup} N$ mit $M = \{q, a, b, e\}$ und $N = V \setminus M$ betrachtet. Bestimmen Sie die Summen

$$s_1 = \sum_{\substack{(v,w)\in E \\ v\in M, w\in N}} f(v, w) \qquad \text{und} \qquad s_2 = \sum_{\substack{(v,w)\in E \\ v\in M, w\in N}} f(w, v)$$

sowie deren Differenz $s_1 - s_2$.
Ändern Sie die Partitionierung nun, indem Sie den Knoten e aus M in N verschieben. Bestimmen Sie für diese neue Partitionierung ebenfalls obige Summen und $s_1 - s_2$.

H88. Bestimmen Sie für das nebenstehend dargestellte Transportnetz einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt mit Hilfe des Ford-Fulkerson-Algorithmus.