TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

13. Übungsblatt für die Übungen vom 23.1.-27.1.2017

Ordnungsrelationen

V89. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Folgende Arbeitschritte sind zur Bereitung eines Kaffees notwendig:

- Kaffeebohnen mahlen (BM)
- Maschine anschalten (MA)
- Kaffeepulver in Maschine füllen (PM)
- Tasse in Maschine stellen (TM)
- Tasse aus dem Schrank nehmen (TS)
- Wasser in Maschine füllen (WM)
- Zucker in Tasse geben (ZT)

Die Menge der Arbeitsschritte bezeichnen wir mit M.

Geben Sie eine (möglichst sinnvolle) Vorgängerbedingung V auf M an. Zeichnen Sie ein Diagramm von (M, V). Ist (M, V) azyklisch? Falls ja, dann geben Sie die zugehörige Ordnungsrelation (M, P) an. Finden Sie eine lineare Erweiterung R von P. Finden Sie eine zweite lineare Erweiterung S von P, so dass $P = R \cap S$ ist?

Ü90. Es ist auf der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ folgende Relation gegeben:

$$R = \left\{(x, y) \,\middle|\, x < y,\ \mathrm{ggT}(x, y) > 1\right\}.$$

(a) Geben Sie die Relationen R, R^2 und R^3 jeweils als Menge von Paaren an.

(b) Warum läßt sich R zu einer Ordnungsrelation erweitern? Bestimmen Sie die kleinste Ordnungsrelation T, die R enthält, und zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm für T.

Ü91. Begründen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen um Ordnungsrelationen, Äquivalenzrelationen, Quasiordnungen oder strikte Ordnungen handelt.

(a) $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a|b :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : ak = b$

(b) $| \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a|b :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : ak = b$

(c) $R \subseteq \{0,1\}^3 \times \{0,1\}^3 : (x_1, y_1, z_1)R(x_2, y_2, z_2) :\Longleftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \wedge z_1 \leq z_2$

(d) $R \subseteq \{0,1,2\}^2 \times \{0,1,2\}^2 : (x_1, y_1)R(x_2, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 < x_2 \vee y_1 < y_2 \vee (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

(e) $R \subseteq \{0,1,2\}^2 \times \{0,1,2\}^2 : (x_1, y_1)R(x_2, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$

Zeichnen Sie, falls möglich, ein Diagramm. Geben Sie jeweils (falls möglich) kleinste, größte, maximale und minimale Elemente an.

Ü92. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede symmetrische und transitive Relation ist reflexiv.

(b) Jede azyklische Relation ist antisymmetrisch.

(c) Der Durchschnitt zweier transitiver Relationen ist wieder transitiv.

(d) Es gibt keine Relation, die gleichzeitig Äquivalenzrelation und Ordnungsrelation ist.

H93. Wir betrachten in dieser Aufgabe die drei durch Diagramme gegebenen Ordnungsrelationen R, S und T auf der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

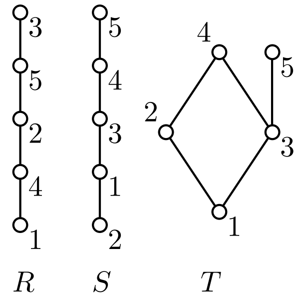
(a) Geben Sie $R \cap S$ und

$$T \circ S = \{(a, b) \in A^2 \mid \exists c \in A : (a, c) \in T, (c, b) \in S\}$$

jeweils als Menge von Paaren an.

(b) Ist $R \cap S$ eine Ordnung bzw. eine lineare Ordnung?

(c) Ist $T \circ S$ eine Ordnung?



H94. Es seien A eine endliche Menge und $f : A \to A$ eine Abbildung. Weiter sei die Relation $R \subseteq A \times A$ folgendermaßen definiert: $R_f = \{(a, b) \mid \exists n \in \mathbb{N} : b = f^n(a)\}$ (dabei gilt $f^0(a) = a$ und $f^n(a) = f(f^{n-1}(a))$.

(a) Zeigen Sie, dass R_f eine Quasiordnung ist und genau dann eine Ordnung, wenn kein Zyklus der Länge ≥ 2 in R_f existiert, d.h. keine Folge $(a_1, a_2), \ldots, (a_n, a_1)$ mit $a_1 \neq a_2$.

(b) Es sei für festes $m \in \mathbb{N}$ folgende Abbildung betrachtet:

$$f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m, \quad f(a) = a^2 + 1 \pmod{m} .$$

Bestimmen Sie für die drei Fälle $m = 5$, $m = 7$ bzw. $m = 2$ den gerichteten Graphen mit Knotenmenge $V = \mathbb{Z}_m$ und Kantenmenge $E = \{(a, f(a)) \mid a \in \mathbb{Z}_m\}$. Schließen Sie daraus, ob die Relation R_f eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}_m$ ist. Geben Sie ggf. ein Ordnungsdiagramm von R_f an.

H95. Es sei $\{0, 1\}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}^i$ die Menge der Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Für zwei Wörter $a = (a_1, \ldots, a_r)$ und $b = (b_1, \ldots, b_s)$ gelte $a \sqsubseteq b$, wenn $r \leq s$ und $\forall i \in \{1, \ldots, r\} : a_i = b_i$ gelten (d.h. a ist ein Teilwort von b). Die *lexikographische Ordnung* $<_{lex} \subseteq \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^*$ ist auf zwei Wörtern $a := (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ und $b = (b_1, b_2, \ldots b_s)$ so definiert:

$$a <_{lex} b :\Longleftrightarrow (a \sqsubseteq b) \lor (\exists i \in \mathbb{N} : (a_i < b_i) \land (\forall j \leq i : a_j = b_j))$$

Zeigen Sie, dass $<_{lex}$ eine lineare Ordnung ist.

Hinweis: Nach der lexikographischen Ordnung sind z.B. Einträge in Lexika sortiert, sie wird umgangssprachlich auch „alphabetische“ Ordnung genannt. Das Alphabet ist dann das natürliche Alphabet A. . . Z.