TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

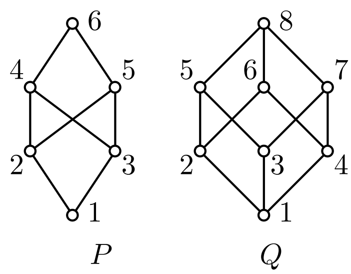
14. Übungsblatt für die Übungen vom 30.1.-3.2.2017

Ketten, Antiketten und Überdeckungen

V96. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Geben Sie eine (minimale) Menge von Diagrammen an, so dass sich jede Ordnungsrelation auf einer 4-elementigen Menge durch eins dieser Diagramme darstellen lässt.

Ü97. (a) Bestimmen Sie die Anzahl der linearen Erweiterungen der durch das rechts stehende Diagramm gegebenen Ordnung P. Geben Sie alle linearen Erweiterungen an. Begründen Sie, dass die Ordnungsdimension von P gleich 2 ist.

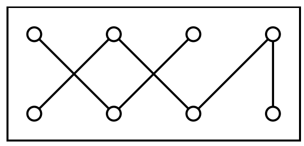
(b)* Begründen Sie, dass die rechts stehende Ordnung Q die Ordnungsdimension 3 hat. Ändert sich die Ordnungsdimension, wenn das Element 6 (mit seinen inzidierenden Kanten) entfernt wird?



Ü98. (a) Es sei M eine Menge mit $n = 4$ Elementen. Zeichnen Sie ein Diagramm der geordneten Menge $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$. Welche Mächtigkeit hat eine Antikette höchstens? Geben Sie alle solchen Antiketten konkret an. Bestimmen Sie außerdem eine minimale Überdeckung von $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$ mit Ketten.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Zeigen Sie, dass dann $\forall k \in \{0, \ldots, n\} : \binom{n}{k} \leq \binom{n}{m}$ gilt.

Ü99. Bestimmen Sie ein maximales Matching in dem rechts stehenden Graphen $G = (X \cup Y, E)$. Führen Sie dazu (siehe Vorlesung nach Satz von König) folgende Schritte aus:



(a) Geben Sie allen Kanten aus E das Gewicht 9.

(b) Fügen Sie einen Knoten q (Quelle) sowie alle Kanten der Form $\{q, y\}$ $(y \in Y)$ hinzu. Wichten Sie diese Kanten mit dem Gewicht 1.

(c) Fügen Sie einen Knoten s (Senke) sowie alle Kanten der Form $\{s, x\}$ $(x \in X)$ hinzu. Wichten Sie diese Kanten mit dem Gewicht 1.

(d) Finden Sie einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus.

(e) Leiten Sie ein maximales Matching aus dem maximalen Fluss sowie eine minimale Knotenüberdeckung aus einem minimalen Schnitt her.

H100. In einer Werkstatt stehen 10 verschiedene Maschinen. Bekannt ist, dass jeder der 10 Arbeiter dieser Werkstatt nur an zwei Maschinen zu arbeiten vermag, während jede Maschine ihrerseits nur von zwei Arbeitern beherrscht wird. Lassen sich die Arbeiter so auf die Maschinen verteilen, dass jeder an einer Maschine zu stehen kommt, an der er auch arbeiten kann?

Hinweis: Modellieren Sie das Problem durch einen Graphen und finden Sie ein geeignetes Matching.

H101. Es sei $X = \{a, b, c\}$ (a, b, c seien paarweise verschieden) und $G_X = (V_X, E_X)$ ein folgendermaßen definierter Graph:

$$V_X = \binom{X}{1} \cup \binom{X}{2}, \qquad E_X = \{\{A, B\} \mid A, B \in V_X, A \subseteq B \text{ oder } B \subseteq A\}$$

Warum ist G_X bipartit? Geben Sie ein Diagramm von G an. Bestimmen Sie ein maximales Matching und eine minimale Knotenüberdeckung. Beachten Sie dabei den Satz von König!

Nun sei $Y = \{a, b, c, d, e\}$ (die Elemente seien paarweise verschieden) und $G_Y = (V_Y, E_Y)$ definiert durch

$$V_Y = \binom{Y}{2} \cup \binom{Y}{3}, \qquad E_Y = \{\{A, B\} \mid A, B \in V_Y, A \subseteq B \text{ oder } B \subseteq A\}$$

Überlegen Sie, wie viele Elemente eine minimale Knotenüberdeckung mindestens haben muss und finden Sie ein maximales Matching mit dieser Mächtigkeit.

Hinweis: Zählen Sie zuerst, welchen Grad jeder Knoten hat!

H102*. Finden Sie eine geordnete Menge, in der jede Antikette endlich ist, die sich aber nicht durch endlich viele Ketten überdecken lässt.

Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.