TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

1. Übungsblatt für die Übungen vom 17.10.-21.10.2016

Logik, Beweisarten

V5. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

Die folgende Behauptung ist offenbar unwahr. Finden Sie den grundsätzlichen Fehler im Aufbau des anschließenden „Beweises“. Formulieren Sie, um diesen Fehler niemals selbst zu begehen, einen geeigneten Merksatz.

Behauptung: Es gilt $1 = 2$.

Beweis: Es sei

$$1 = 2.$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit 0, dann ergibt sich

$$0 = 0.$$

Dies ist eine wahre Aussage, damit ist die Behauptung richtig.

Ü6. (a) Ein Gerät kann je nach Kombination der Baugruppen A, B, C, D in verschiedenen Varianten hergestellt werden. Dabei sind jedoch folgende Bedingungen sämtlich einzuhalten:

- Die Baugruppen A und D können, wenn überhaupt, nur gemeinsam auftreten.
- Der Einbau von D macht den Einbau von C erforderlich.
- Eine Variante, die A nicht enthält, muss B enthalten.
- B und D schließen sich gegenseitig aus.

Stellen Sie jede der vier Bedingungen als einen (möglichst einfachen) aussagenlogischen Term dar und ermitteln Sie alle möglichen Bauvarianten.

(b) Verneinen Sie folgende Aussagen:

- Es gibt Kurse, in denen jeder Student eine gute Note schaffen kann.
- $\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ (|x| < y) \vee (y^2 - 2x^2 = 2)$.
- Zu jedem Mann gibt es mindestens eine Frau, die ihn nicht liebt.

(c) Prüfen Sie den Wahrheitsgehalt folgender Aussagen:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}:\ y^2 = x$ (ii) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}:\ y^2 = x$

(iii) $\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R}:\ y^2 = x$ (iv) $\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}:\ y^2 = x$.

Ü7. Beweisen Sie, dass folgende Gleichungen für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gelten:

(i) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (ii) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ (iii) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Ü8. (a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Die Summe der Innenwinkel eines natürlichen n-Ecks ($n > 2$) beträgt $\pi(n-2)$.

(b) Beweisen Sie: $\sqrt{2}$ ist irrational.

A9. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 2. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) (i) Formulieren Sie die folgende Aussage $\mathcal{S}$ unter alleiniger Benutzung der Zeichen $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, der Abkürzung $prim(x)$ für „x ist Primzahl"und der „atomaren" Formeln $ab = c$, $a = 1$ und $b = 1$.

(Zur Vereinfachung seien dabei alle betrachteten Zahlen stets als natürliche Zahlen vorausgesetzt, ohne dass dies extra gesagt werden soll; die Quantoren $\forall, \exists$ sollen nur ein Argument haben, d.h. z.B. $\forall a, b, c$ ist verboten und durch $\forall a \forall b \forall c$ auszudrücken.)

($\mathcal{S}$) *Wenn es eine Primzahl gibt, so folgt für drei Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft $ab = c$ stets, dass $a = 1$ oder $b = 1$ ist.*

(ii) Formen Sie die Negation $\neg\mathcal{S}$ der Aussage $\mathcal{S}$ und formulieren Sie das Ergebnis wieder als Satz der deutschen Sprache. Welcher der beiden Sätze ($\mathcal{S}$ oder $\neg\mathcal{S}$) ist wahr? Was wäre, wenn es keine Primzahlen gäbe?

(b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für die Anzahl $d(n)$ der Diagonalen eines ebenen, konvexen n-Ecks gilt $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

H10. Anhand der Wertetabellen zeige man, dass die folgenden Gleichungen gelten:

(a) $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ und $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ (Regeln von de Morgan),

(b) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ und $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Distributivität).

H11. Wo steckt der Fehler im folgenden „Beweis" durch vollständige Induktion?

Behauptung ($H(n)$): Wenn von n Mädchen eines blaue Augen hat, dann haben alle n Mädchen blaue Augen. „Beweis":

(a) Induktionsanfang: $H(1)$ ist offenbar richtig.

(b) Induktionsschritt: $H(n)$ sei wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, wir zeigen die Richtigkeit von $H(n+1)$: Wir betrachten $n + 1$ Mädchen (bezeichnet mit $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$), von denen eins ($M_1$) blauäugig sein soll. Die beiden Mengen $\{M_1, \ldots, M_n\}$ und $\{M_1, \ldots, M_{n-1}, M_{n+1}\}$ enthalten jeweils das Mädchen M_1 und besitzen je n Elemente, bestehen also nach Induktionsvoraussetzung aus lauter blauäugigen Mädchen. Da alle Mädchen in einer der Mengen vorkommen, sind also alle Mädchen blauäugig.