TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

2. Übungsblatt für die Übungen vom 24.10.-28.10.2016

Mengen, Mengenalgebra

V12. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Es werden die Mengen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 > 0\}$ und $B = \{r \in \mathbb{R} \mid -1 < r \leq 4\}$ (Kurzschreibweise $B = (-1, 4]$) als Teilmengen der Grundmenge $\mathbb{R}$ betrachtet. Geben Sie die folgenden Mengen in üblicher Mengenschreibweise an und skizzieren Sie sie:
(a) $A \cup B$ (b) $A \cap \overline{B}$ (c) $A \setminus B$ (d) $A \times B$

(b) Es sei $A = \{a, b\}$ sowie $B = \mathfrak{P}(A)$ und $C = \mathfrak{P}(B)$. Geben Sie B elementweise an. Welche Aussagen sind wahr?

(i) $\{a\} \in A$	(ii) $\{a\} \in B$	(iii) $\{a\} \in C$	(iv) $\{\{a\}\} \subseteq B$
(v) $\{\{a\}\} \in C$	(vi) $\{\emptyset\} \subseteq A$	(vii) $\{\emptyset\} \subseteq B$	(viii) $\{\emptyset\} \subseteq C$

Ü13. (a) Überprüfen Sie für die folgenden Gleichungen, ob sie für beliebige Mengen A, B, C richtig oder falsch sind. Geben Sie dazu einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
(ii) $(A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) \cup B$,
(iii) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

(b) Bestimmen Sie für die Menge M={Apfel,Birne,Pflaume} die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$. Wie sieht $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ aus? Und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

Ü14. In dieser Aufgabe betrachten wir den zu $k, n \in \mathbb{N}$ durch

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierten Binomialkoeffizienten.

(a) Zeigen Sie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(c) Beweisen Sie: Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt genau die Anzahl der k-elementigen Teimengen einer n-elementigen Menge an.

Hinweis: Sie können dazu den Teil Ü14b verwenden, müssen aber nicht.

Ü15. In der Vorlesung ist die Aussage, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ einer beliebigen Menge M die Mächtigkeit $|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}$ hat, angesprochen worden. Beweisen Sie diese Aussage nun mittels vollständiger Induktion.

Finden Sie auch einen Beweis, der ohne Induktion auskommt?

A16. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 3. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Über zwei Mengen A und B ist folgendes bekannt:

(i) $A \cup B = \{x^2 + y \mid x \in \{0,1,2\}, y \in \{0,1,2\}\}$

(ii) $|A| = |B| + 3$

(iii) $|A \cap B| = 2$

(iv) $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$

Dadurch sind die Mengen A und B jedoch noch nicht eindeutig festgelegt.

(i) Geben Sie alle Mengen B elementweise an, die obige vier Bedingungen erfüllen.

(ii) Wie viele Mengenpaare A,B gibt es, die obige Bedingungen erfüllen?

Hinweis: Sie dürfen zur Lösung dieser Aufgabe die Gleichung $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ nutzen.

(b) Auf einem Sektempfang treffen sich n Personen. Beweisen oder widerlegen Sie: wenn jeder mit jedem anstößt, dann wird insgesamt $\frac{n(n-1)}{2}$ mal geprostet.

H17. Überprüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Für alle Mengen A, X, Y gilt $(A \cup X = A \cup Y) \implies (X = Y)$.

(b) Für alle Mengen A, X, Y gilt $(A \cap X = A \cap Y) \implies (X = Y)$.

(c) Für alle Mengen A, X, Y gilt: $((A \cup X = A \cup Y) \wedge (A \cap X = A \cap Y)) \implies (X = Y)$.

Hinweis: Sie können z.B. nutzen, dass $X = X \cap (A \cup X)$ und $Y = (A \cup Y) \cap Y$ gilt. Warum?

H18. Beweisen Sie, dass die Beziehungen

$$\mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cap B)$$
$$\mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cup B)$$

für beliebige Mengen A und B gelten. Gilt jeweils sogar die Gleichheit? Begründen Sie!