Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra
Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig
Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

3. Übungsblatt für die Übungen vom 1.11.-4.11.2016

Äquivalenzrelationen, Abbildungen

V19. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Auf der Menge aller Menschen gibt es die (binären) Relationen „ist Mutter von“, „ist Schwester von“, „haben gemeinsame Vorfahren“, „kennt“, „ist befreundet mit“.

Untersuchen Sie, welche der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation diese 5 Relationen besitzen.

Ü20. Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R bzw. $\sim$ auf der jeweiligen Grundmenge A Äquivalenzrelationen sind. Charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen.

(a) $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\quad R = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (6, 1)\} \cup \Delta_A$,

(b) $A = \mathbb{R}$, $\quad x \sim y :\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + 2k\pi$,

(c) $A = \mathbb{R}$, $\quad x \sim y :\iff |x - y| < \pi$,

(d) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $\quad (a, b) \sim (c, d) :\iff ad = bc$.

Geben Sie zur Relation R die „Kreuztabelle“ und die zugehörige Zerlegung an.

Hinweis: Die Relation $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$ bezeichnet die identische Relation auf A.

Ü21. (a) Geben Sie Beispiele für Relationen an, die zwei der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllen, nicht jedoch die dritte.

(b) Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer vier- bzw. fünfelementigen Menge?

Hinweis: Sie können ausnutzen, dass sich jede Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ durch ihre Äquivalenzklassen beschreiben lässt. Die Menge der Äquivalenzklassen $M/R := \{[m]_R \mid m \in M\}$ bildet eine Zerlegung von M.

Ü22. Beschreiben Sie die folgenden Funktionen in einer geeigneten Weise (Wertetabelle, Aufzeichnen im Koordinatensystem, ...). Untersuchen Sie, ob die Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $f_a : \{0, 1, \ldots, 9\} \to \{0, 1, \ldots, 9\}$, $\quad f_a(m) = n :\iff n$ ist die letzte Ziffer von $a \cdot m$ (für $a = 2$, $a = 3$ und $a = 4$),

(b) $g_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\quad g_a(z) := a^z$ (für beliebiges $a \in \mathbb{N}$),

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad h(x) = sin(x)$,

(d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad k(x) = x^3 + x$,

(e) $m_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad m_{a,b}(x) = x^2 + ax + b$. (für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$)

A23. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 4. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Visualisieren Sie die Relationen geeignet (Kreuztabelle, Koordinatensystem, ...).

(a) $A = \{0,1,2,3\}, \quad R = \{(0,0),(0,2),(1,1),(2,0),(3,3)\}$,

(b) $A = \{0,1,2,3\}, \quad R = \{(a,b) \mid a - b < 1\}$,

(c) $A = \mathbb{R}^2, \quad R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid a - c = b - d\}$.

(d) $A = \mathbb{R}^2, \quad R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (a \leq c) \wedge (b \leq d)\}$.

H24. Es seien R und S zwei Äquivalenzrelationen auf einer Menge A.

(a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $R \cap S$ wieder eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Für die Vereinigung $R \cup S$ gilt i.a. nicht, dass sie eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie zwei Beispiele für R und S auf der Menge $A = \{1,2,3,4,5\}$ an, und zwar eins derart, dass $R \cup S$ eine Äquivalenzrelation ist, und eins so, dass $R \cup S$ keine Äquivalenzrelation ist.

H25. (a) Es sei auf der Menge $M = \{0,1\}$ die Abbildung $f : M \times M \to \{-1,0,1\}$ mit $f\big((m_1,m_2)\big) = m_1 - m_2$ definiert. Prüfen Sie, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Antworten!

(b) Gegeben sind die Mengen $A = \{a,b\}$ und $B = \{c,d,e,f\}$.

(i) Bestimmen Sie die Anzahl aller injektiven Abbildungen in B^A und in A^B.

(ii) Bestimmen Sie die Anzahl aller surjektiven Abbildungen in B^A und in A^B.