TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

4. Übungsblatt für die Übungen vom 7.11.-11.11.2016

Abbildungen, die Peano-Axiome

V26. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es seien, für einen Parameter $a \in \mathbb{Z}$, die folgenden Funktionen gegeben:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2 \quad , \qquad g_a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x + a.$$

(a) Bestimmen Sie Definitionsbereich, Zielbereich und Abbildungsvorschrift der Funktionen $f \circ g_a$ und $g_a \circ f$. Skizzieren Sie die Funktionen für $a = 0$ und für $a = 3$ in ein Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1}.

(c) Untersuchen Sie $f \circ g_a$ und $g_a \circ f$ auf Injektivität und Surjektivität.

Ü27. Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Beweisen Sie:

(a) Die Komposition injektiver Funktionen ist wieder injektiv.

(b) Die Komposition surjektiver Funktionen ist wieder surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist g surjektiv.

(d) Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist f injektiv.

Widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel): Ist $g \circ f$ bijektiv, dann sind f und g bijektiv.

Ü28. Welche der folgenden Strukturen, bestehend aus Grundmenge, Nachfolgerfunktion und Nullelement, erfüllen die Peano-Axiome? Welches Axiom ist ggf. verletzt?

(a) $(\mathbb{N} \cup \{-5, -4, -3, -2, -1\}, N, -5)$ mit $N(a) := a + 1$,

(b) $(\mathbb{Z}, N, 0)$ mit $N(a) := a + 1$,

(c) $(\mathbb{Z}, N', 0)$ mit $N'(a) := \begin{cases} -a + 1, & a \leq 0 \\ -a, & a > 0 \end{cases}$

(d) $(\{0, 1, \ldots, 1000\}, \tilde{N}, 0)$ mit $\tilde{N}(a) := \begin{cases} a + 1, & a < 1000 \\ 1, & a = 1000 \end{cases}$

(e) $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, \hat{N}, 1)$ mit $\hat{N}(a) := 2a$,

Hinweis: Diejenigen Strukturen, die die Peano-Axiome erfüllen, sind Modelle für die natürlichen Zahlen, d.h. sie „verhalten sich ebenso“ wie die natürlichen Zahlen.

Ü29. Zeigen Sie mittels der Peano-Axiome, dass folgende Eigenschaften für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a) Es gilt $n^+ \neq n$, wobei n^+ der Nachfolger von n sei,

(b) ist $n \neq 0$, so gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $m^+ = n$.

A30. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 5. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Es sei $\mathbb{S} := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : m^2 = n\}$ die Menge der Quadratzahlen. Weiter seien

$$g : \mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1 \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{S}, \quad x \mapsto x^2$$

Abbildungen. Bestimmen Sie, falls möglich, die Abbildungen $(f \circ g)^{-1}$ und $g^{-1} \circ f^{-1}$.

(b) Es seien $g : A \to B$ und $f : B \to C$ bijektive Funktionen. Beweisen Sie:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

H31. Bestimmen Sie für folgende reelle Funktionen $f : D(f) \to \mathbb{R}$ den größten Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ und den zugehörigen Wertebereich $W(f)$, und fertigen Sie eine Skizze an:

i) $f(x) = 4x(1 - x)$, ii) $f(x) = \ln(|x + 1| - 2)$, iii) $f(x) = \frac{1}{4x(1-x)}$.

Untersuchen Sie, welche der Funktionen injektiv bzw. surjektiv sind.

Finden Sie alle Intervalle, in denen eine Umkehrfunktion existiert, berechnen Sie f^{-1} für jedes dieser Intervalle, und geben Sie jeweils den Definitionsbereich von f^{-1} an.

H32. Zeigen Sie mittels des Induktionsaxioms von Peano und der in der Vorlesung gegebenen rekursiven Definitionen der Addition in $\mathbb{N}$, dass folgende Eigenschaften gelten:

(a) $\forall n, m \in \mathbb{N} : (n + m)^+ = n^+ + m$.

(b) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m = m + n$.