TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

5. Übungsblatt für die Übungen vom 14.11.-18.11.2016

Teilbarkeit, Primzahlen

V33. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Summe

$$s := n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4)$$

keine Primzahl ist. Finden Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so dass s genau 3 Teiler hat.

(b) Zeigen Sie: Gilt $n, m \in \mathbb{N}$ und ist m gerade, dann ist die Summe

$$s^* = \sum_{i=0}^{m} (n+i) = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+m)$$

durch $m+1$ teilbar.

Ü34. (a) Berechnen Sie die Anzahl der Teiler zu den folgenden natürlichen Zahlen und zeichnen Sie deren Teilerdiagramme.

(i) $n = 30$, (ii) $n = 100$, (iii) $n = 660$

(b) Beweisen Sie, dass für beliebige natürliche Zahlen $a, b, c, d, s, t \in \mathbb{N}$ folgende Implikationen gelten:

$$\text{(i) } a|b \wedge c|d \implies ac|bd, \qquad \text{(ii) } a|b \wedge a|c \implies a|(sb+tc).$$

Ü35. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Ü36. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und e das neutrale Element in G. Beweisen Sie die folgenden Formeln:

$$\text{(i) } e^{-1} = e, \quad \text{(ii) } \forall a, b \in G: \ (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}, \quad \text{(iii) } \forall a \in G: \ (a^{-1})^{-1} = a.$$

Es sei nun $(R, +, \cdot)$ ein Ring und 1 das neutrale Element der Multiplikation in R. Beweisen Sie die folgenden Formeln:

$$\text{(i) } \forall x \in R: 0 \cdot x = 0 = x \cdot 0, \quad \text{(ii) } \forall x \in R: (-1) \cdot x = -x = x \cdot (-1), \quad \text{(iii) } (-1) \cdot (-1) = 1$$

A37. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 6. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer auf; die zweite, dritte und vierte Ziffer bilden (als 3-stellige Zahl gelesen) die Zahl x.

Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von x. Zeichnen Sie ein Teilerdiagramm aller Teiler von x und bestimmen Sie die Anzahl der Teiler.

Finden Sie alle Zahlen $n \in \{1, \ldots, 100\}$, die genau 5 Teiler haben (und begründen Sie, warum das alle sind).

H38*. Finden Sie alle natürlichen Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$, für die $y^3 - x^3 = 721$ gilt.

H39*. Finden Sie die kleinste positive natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft

$$p|n \iff (p-1)|n \qquad \text{für alle Primzahlen } p.$$

Hinweis: Solch eine Zahl gibt es wirklich. Allerdings ist das Finden der Lösung durch pures Probieren sehr aufwendig. Falls Sie (bei 1 beginnend) pro Zahl 1 Minute zum Überprüfen brauchen, werden Sie n erst nach mehr als einem Tag finden.