TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. J. Zumbrägel, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker, Teil Diskrete Strukturen, Wintersemester 2016/17

6. Übungsblatt für die Übungen vom 21.11.-25.11.2016

ggT und kgV, Euklidischer Algorithmus, der Restklassenring $\mathbb{Z}_n$

V40. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Bert möchte gern 0,2 Liter Wasser aus dem Wasserhahn in ein mehr als 2 Liter messendes Gefäß abmessen. Er hat allerdings nur zwei Flaschen, die 1,25 Liter bzw. 0,7 Liter fassen (sowie einen Trichter, um ggf. Wasser aus dem Gefäß in eine der Flaschen zu gießen). Wie kann er das anstellen?

(b) Kann Bert die Aufgabe auch lösen, wenn er eine Flasche zu 1,25 Liter und ein zu 1 Liter hat?

Hinweis: Finden Sie zunächst den Bezug dieser Aufgabe zu den aktuell in der Vorlesung besprochenen Themen ggT und kgV sowie zum erweiterten Euklidischen Algorithmus.

Ü41. (a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(m,n)$ und das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(m,n)$ der beiden Zahlen $m = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ und $n = 396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$. Bilden Sie die Produkte $m \cdot n$ und $\mathrm{ggT}(m,n) \cdot \mathrm{kgV}(m,n)$. Was stellen Sie fest?

(b) Beweisen Sie: Für je zwei natürliche Zahlen m, n gilt $m \cdot n = \mathrm{ggT}(m,n) \cdot \mathrm{kgV}(m,n)$.

Ü42. (a) Berechnen Sie zu den angegebenen Paaren (a,b) den größten gemeinsamen Teiler und stellen Sie diesen als ganzzahlige Linearkombination von a und b (d.h. als $\mathrm{ggT}(a,b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) dar. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse!

(i) $a = 24, b = 135$, (ii) $a = 21, b = 34$ (iii) $a = 94, b = 127$, (iv) $a = 511, b = 1001$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(150,105),56) = \alpha \cdot 150 + \beta \cdot 105 + \gamma \cdot 56$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ die Beziehung $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a,b),c) = \mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b,c))$ erfüllen.

Ü43. In dieser Aufgabe betrachten wir den Restklassenring $\mathbb{Z}_6$. Stellen Sie die Operationstafeln für die Addition und für die Multiplikation auf. Welche Elemente besitzen ein Inverses bezüglich der Multiplikation?
Geben Sie analog die Operationstafeln für Addition und Multiplikation im Restklassenring $\mathbb{Z}_7$ an.

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Hinweis: In eine Operationstafel einer Menge M mit Operation $\circ$ werden alle möglichen Summen bzw. Produkte der Elemente aus M eingetragen. Rechts ein Beispiel der Operationstafel für $\mathbb{Z}_6$ mit der Addition $\pmod 6$.

A44. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 7. Übung oder im Lernraum unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer (7-stellig) auf. Die letzten drei Ziffern bilden (als dreistellige Zahl gelesen) die Zahl z. Die Zahl y erhalten Sie nach der Vorschrift:

$$y := \begin{cases} z, & z > 99 \\ z + 100, & z \leq 99 \end{cases}$$

Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den ggT von 1009 und y und stellen Sie ihn als Linearkombination von 1009 und y dar. Finden Sie das Inverse von y in $(\mathbb{Z}_{1009}, \cdot)$ oder begründen Sie, warum das Inverse nicht existiert. Machen Sie eine Probe!

H45*. Auf einer Insel leben 13 rote, 15 grüne und 17 blaue Chamäleons. Treffen sich zwei verschiedenfarbige Chamäleons, ändern sie beide ihre Farbe in die dritte Farbe. Begegnen sich gleichfarbige Chamäleons, ändern sie ihre Farbe nicht. Ist es durch eine bestimmte Folge von Begegnungen möglich, dass alle Chamäleons die gleiche Farbe annehmen?

Hinweis: Codieren Sie die drei Farben als Reste $\pmod 3$. Ändert sich die „Summe“ der Farben, wenn sich 2 Chamäleons treffen? Was folgt daraus?

H46. Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* (f_n) ist rekursiv definiert durch

$$f_1 = f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n > 0.$$

(a) Berechnen Sie die Elemente der Folge bis f_{10}.

(b) Stellen Sie den ggT von f_9 und f_{10} sowie von f_{10} und f_{11} als Linearkombination von f_9 und f_{10} bzw. von f_{10} und f_{11} dar.

(c) Zeigen Sie (z.B. durch Induktion), dass zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen f_n und f_{n+1} teilerfremd sind und insbesondere die Beziehung $(-1)^n = f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n+1}$ (für alle $n > 2$) für ihre Linearkombination gilt.