

COXETER-CATALAN KOMBINATORIK

HENRI MÜHLE

1. GRUNDLAGEN

1.1. Coxeter-Systeme.

DEFINITION 1.1

Für eine Menge S ist eine Abbildung $m: S \times S \rightarrow \{1, 2, \dots, \infty\}$ eine **COXETER-MATRIX**, wenn sie folgende Bedingungen für alle $s, s' \in S$ erfüllt:

$$\begin{aligned} m(s, s') &= m(s', s), \\ m(s, s') &= 1 \text{ genau dann, wenn } s = s'. \end{aligned}$$

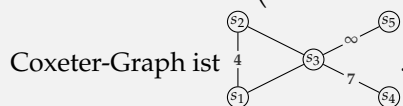
Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, dass S endlich ist.

DEFINITION 1.2

Sei m eine Coxeter-Matrix auf der Grundmenge S . Der zu m gehörige **COXETER-GRAPH** ist der beschriftete Graph auf der Knotenmenge S , in dem genau dann eine Kante zwischen s und s' existiert, wenn $m(s, s') > 2$ ist. So eine Kante wird mit $m(s, s')$ beschriftet, falls $m(s, s') > 3$ ist.

BEISPIEL 1.3

Die Matrix $m = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 7 & \infty \\ 2 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & \infty & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine Coxeter-Matrix, und der zugehörige



Weiter definieren wir $S_{\text{fin}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(s, s') \mid m(s, s') < \infty\}$ und kommen zur ersten wesentlichen Definition.

DEFINITION 1.4

Sei m eine Coxeter-Matrix auf der Grundmenge S . Die Gruppe

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \langle S \mid (ss')^{m(s,s')} = e \text{ für alle } (s, s') \in S_{\text{fin}}^2 \rangle$$

ist die **COXETER-GRUPPE** zu m . Das Paar (W, S) heißt **COXETER-SYSTEM**.

Die Elemente von S sind die **COXETER-ERZEUGER** von W , und $\#S$ ist der **RANG** von W . Eine Coxeter-Gruppe ist **IRREDUZIBEL**, wenn der zugehörige Coxeter-Graph zusammenhängend ist.

DEFINITION 1.5

Sei (W, S) ein Coxeter-System, und sei $J \subseteq S$. Die von J erzeugte Gruppe W_J ist eine Untergruppe von W und (W_J, J) ist offenbar ein Coxeter-System. Eine zu W_J konjugierte Untergruppe von W ist eine **PARABOLISCHE UNTERGRUPPE**.

Für $s \in S$ schreiben wir oft auch $\langle s \rangle \stackrel{\text{def}}{=} S \setminus \{s\}$.

Aus den Bedingungen an eine Coxeter-Matrix folgt, dass die Coxeter-Erzeuger Involutionen sind, und dass zwei Coxeter-Erzeuger genau dann kommutieren, wenn es zwischen ihnen keine Kante im Coxeter-Graphen gibt. Außerdem folgt, dass zwei Coxeter-Erzeuger s, s' die **ZOPF-RELATION**

$$\underbrace{ss' \dots}_{m(s,s')} = \underbrace{s'ss' \dots}_{m(s,s')}$$

erfüllen. Coxeter-Gruppen besitzen die folgende Universalitätseigenschaft.

BEMERKUNG 1.6

Sei (W, S) ein Coxeter-System, G eine Gruppe, und $f: S \rightarrow G$ eine Abbildung, die

$$(f(s), f(s'))^{m(s,s')} = e_G$$

für alle $(s, s') \in S_{\text{fin}}^2$ erfüllt. In dem Fall lässt sich f eindeutig zu einem Gruppenhomomorphismus $f: W \rightarrow G$ fortsetzen.

BEMERKUNG 1.7

Coxeter-Gruppen haben eine schöne Darstellung als Spiegelungsgruppen, also als Gruppen die von orthogonalen Spiegelungen in einem euklidischen Raum erzeugt werden. Damit ergeben sich direkt (besonders im endlichen Fall) geometrische Zusammenhänge, insbesondere zur Gebäudetheorie, und der Theorie der Hyperebenenarrangements.

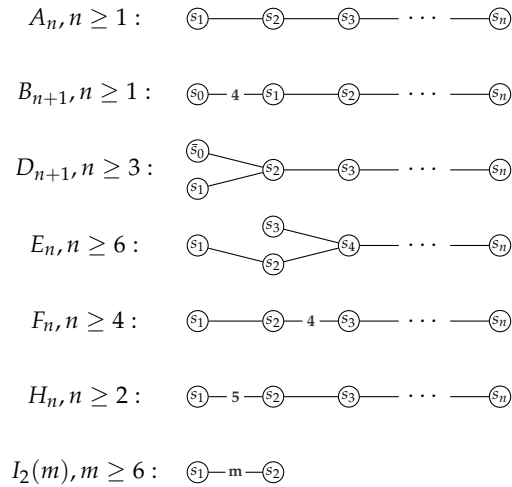


ABBILDUNG 1. Einige Coxeter-Graphen

BEMERKUNG 1.8

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, anhand einer Gruppenpräsentation zu entscheiden ob die Gruppe trivial ist oder nicht. Ebenso ist es kein einfaches Problem für zwei gegebene Worte in den Erzeugern zu entscheiden, ob sie das gleiche Gruppenelement repräsentieren. Coxeter-Gruppen haben die schöne Eigenschaft, dass es eine kanonische Lösung für dieses Problem gibt. Und zwar kann man je zwei Worte in den Coxeter-Erzeugern, die dasselbe Element repräsentieren, durch eine Folge von Zopf- und Nulltransformationen ineinander überführen. Eine **NULLTRANSFORMATION** ist das Entfernen bzw. Einfügen von ss in ein solches Wort, eine **ZOPFTRANSFORMATION** ist die Ersetzung von $\underbrace{ss's \dots}_{m(s,s')}$ durch $\underbrace{s'ss' \dots}_{m(s,s')}$.

1.2. Die Klassifikation endlicher, irreduzibler Coxeter-Gruppen.

SATZ 1.9: [2]

Sei (W, S) ein irreduzibles Coxeter-System. Es ist W genau dann endlich, wenn gilt:

- $W \cong A_n$ für $n \geq 1$;
- $W \cong B_n$ für $n \geq 2$;
- $W \cong D_n$ für $n \geq 4$;
- $W \cong E_n$ für $6 \leq n \leq 8$;
- $W \cong F_n$ für $n = 4$;
- $W \cong H_n$ für $2 \leq n \leq 4$;
- $W \cong I_2(m)$ für $m \geq 6$.

Beweisidee. Sei (W, S) ein Coxeter-System mit Coxeter-Matrix M . Wir definieren eine Bilinearform $B_{(W,S)} = (b_{s,s'})_{s,s' \in S}$ vermöge $b_{s,s'} \stackrel{\text{def}}{=} -\cos \frac{\pi}{m(s,s')}$. (Hierbei ist $\cos \frac{\pi}{\infty} = 1$.) Anschließend zeigt man unter Verwendung der geometrischen Darstellung von (W, S) als Spiegelungsgruppe, dass W genau dann endlich ist, wenn $B_{(W,S)}$ positiv definit ist. Zuletzt klassifiziert man, welche Teilgraphen eines Coxeter-Graphen eine nicht positiv-definite Bilinearform induzieren. \square

BEISPIEL 1.10

Wir beschreiben die Wirkung der Coxeter-Erzeuger von A_n anhand eines Kartenstapels mit $n + 1$ unterscheidbaren Karten. Der Erzeuger s_i vertauscht dabei die i -te und die $(i + 1)$ -te Karte. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass dadurch die Zopf-Relationen vom Typ A erfüllt sind. Dementsprechend sind die Elemente von A_n alle möglichen Kartenstapel, und es folgt, dass $\#A_n = (n + 1)!$ ist.

Insbesondere ist A_n isomorph zur **SYMMETRISCHEN GRUPPE** \mathfrak{S}_{n+1} aller Permutationen von $[n + 1]$. Die Coxeter-Erzeuger entsprechen dann den benachbarten Transpositionen. Man kann leicht nachprüfen, dass \mathfrak{S}_{n+1} von der Menge $\{(i \ i+1) \mid i \in [n]\}$ erzeugt wird, und dass die entsprechenden Zopfrelationen gelten.

Außerdem ist A_n die Symmetriegruppe eines n -dimensionalen Simplex.

BEISPIEL 1.11

Um die Coxeter-Gruppe B_n zu beschreiben, verwenden wir ebenfalls das Kartenmodell. Diesmal betrachten wir Stapel mit n unterscheidbaren Karten, die jeweils eine positive und eine negative Seiten haben. Die Erzeuger s_i für $i \in [n - 1]$ vertauschen dabei wiederum die i -te mit der $(i + 1)$ -ten Karte, und der Erzeuger s_0 dreht die oberste Karte auf dem Stapel um. Es lässt sich wiederum leicht nachprüfen, dass dadurch die Zopf-Relationen vom Typ B erfüllt sind. Also sind die Elemente von B_n genau alle derartigen Kartenstapel, und es folgt dass $\#B_n = 2^n n!$ ist.

Außerdem ist B_n die Symmetriegruppe eines n -dimensionalen Würfels, bzw. Hyperoktaeders.

BEISPIEL 1.12

Für die Coxeter-Gruppe D_n verwenden wir erneut das signierte Kartenmodell aus Typ B . Die Erzeuger s_i für $i \in [n - 1]$ vertauschen dabei wiederum die i -te mit der $(i + 1)$ -ten Karte, und der Erzeuger \bar{s}_0 dreht die obersten beiden Karten des Stapels (als Paket) um. Wiederum zeigt man schnell, dass dadurch die Zopf-Relationen vom Typ D erfüllt sind. Insbesondere besteht D_n also aus allen signierten Kartenstapeln in denen jeweils eine gerade Anzahl von Karten mit der negativen Seite nach oben liegen, und es gilt $\bar{s}_0 = s_0 s_1 s_0$. Damit ist D_n eine Untergruppe vom Index 2 in B_n , also gilt $\#D_n = 2^{n-1} n!$.

D_n ist die Symmetriegruppe des n -dimensionalen Halbwürfels $1_{n-3,1}$.

BEISPIEL 1.13

Für die endlichen Coxeter-Gruppen vom Typ E gilt: E_6 ist die Symmetriegruppe des halbregulären Polytops 2_{21} , und es ist $\#E_6 = 51840$. E_7 ist die Symmetriegruppe des 3_{21} , und es ist $\#E_7 = 2903040$. E_8 ist die Symmetriegruppe des 4_{21} und es ist $\#E_8 = 696729600$.

BEISPIEL 1.14

Die Coxeter-Gruppe F_4 ist die Symmetriegruppe des 24-Zellers, und es gilt $\#F_4 = 1152$.

BEISPIEL 1.15

Die Coxeter-Gruppe H_3 ist die Symmetriegruppe des Dodekaeders, bzw. des Ikosaeders, und es gilt $\#H_3 = 120$. Die Coxeter-Gruppe H_4 ist die Symmetriegruppe des 120-Zellers, bzw. des 600-Zellers, und es gilt $\#H_4 = 14400$.

BEISPIEL 1.16

Die Coxeter-Gruppe $I_2(m)$ lässt sich wie folgt beschreiben. Wir betrachten zwei Geraden g_1, g_2 in \mathbb{R}^2 , die sich im Ursprung in einem Winkel von $\cos \frac{\pi}{m}$ schneiden. Dann ist s_1 die orthogonale Spiegelung an g_1 und s_2 die orthogonale Spiegelung an g_2 . Insbesondere ist das Produkt s_1s_2 eine Drehung der Ebene um den Winkel $\frac{2\pi}{m}$. Die Gruppe $I_2(m)$ ist demnach isomorph zur **DIEDERGRUPPE** \mathcal{D}_m , der Symmetriegruppe eines regulären, konvexen m -Ecks, und es gilt $\#I_2(m) = 2m$.

1.3. Darstellung als Permutationsgruppen. Wir beschreiben nun, wie sich Coxeter-Gruppen schön handlich als Permutationsgruppen darstellen lassen. Sei dazu (W, S) ein Coxeter-System.

DEFINITION 1.17

Sei (W, S) ein Coxeter-System. Die Menge aller **SPIEGELUNGEN** von W ist

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \{wsw^{-1} \mid w \in W, s \in S\}.$$

Offenbar ist $S \subseteq T$ und $t^2 = e$ für alle $t \in T$. Den folgenden Begriff werden wir später rechtfertigen.

DEFINITION 1.18

Sei $w \in W$ und $w = s_1s_2 \cdots s_k$. Für $i \in [k]$ sei $t_i \stackrel{\text{def}}{=} (s_1s_2 \cdots s_{i-1})s_i(s_1s_2 \cdots s_{i-1})^{-1}$. Dann ist

$$\hat{T}(s_1s_2 \cdots s_k) \stackrel{\text{def}}{=} (t_1, t_2, \dots, t_k)$$

die **INVERSIONSORDNUNG** von $s_1s_2 \cdots s_k$.

Es folgt direkt, dass $t_i \in T$, sowie

$$\begin{aligned} t_i s_1 s_2 \cdots s_k &= s_1 s_2 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k \stackrel{\text{def}}{=} s_1 s_2 \cdots s_{i-1} s_{i+1} s_{i+2} \cdots s_k, \\ s_1 s_2 \cdots s_i &= t_i t_{i-1} \cdots t_1. \end{aligned}$$

LEMMA 1.19

Sei $w = s_1 s_2 \cdots s_k$ mit k minimal. Dann gilt $t_i \neq t_j$ für alle $1 \leq i < j \leq k$.

Beweis. Angenommen, es gibt $i < j$ mit $t_i = t_j$. Dann folgt

$$w = t_i t_j s_1 s_2 \cdots s_k = s_1 s_2 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_k,$$

was der Minimalität von k widerspricht. \square

Wir setzen

$$\#(s_1 s_2 \cdots s_k; t) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{i \in [k] \mid t_i = t\}.$$

Für $s \in S$ und $t \in T$ sei

$$\eta(s; t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1, & \text{wenn } s = t, \\ 1, & \text{wenn } s \neq t. \end{cases}$$

LEMMA 1.20

Für $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ und $t \in T$ gilt

$$(-1)^{\#(s_1 s_2 \cdots s_k; t)} = \prod_{i=1}^k \eta(s_i; s_{i-1} s_{i-2} \cdots s_1 t s_1 \cdots s_{i-2} s_{i-1}).$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$(-1)^{\#(s_1 \cdots s_k; t)} = \prod_{i=1}^k \eta(t_i; t) = \prod_{i=1}^k \eta(s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_2 s_1; t) = \prod_{i=1}^k \eta(s_i; s_{i-1} \cdots s_2 s_1 t s_1 s_2 \cdots s_{i-1}).$$

\square

DEFINITION 1.21

Sei (W, S) ein Coxeter-System, und sei T die Menge der Spiegelungen von (W, S) . Die Menge $R \stackrel{\text{def}}{=} T \times \{-1, 1\}$ ist die **WURZELMENGE** von (W, S) .

Wir betrachten die Gruppe $\text{Sym}(R)$ aller Permutationen von R , sowie die Abbildung

$$\pi_s: R \rightarrow R, \quad (t, \varepsilon) \mapsto (sts, \varepsilon \eta(s; t))$$

für $s \in S$.

LEMMA 1.22

Für $s \in S$ ist $\pi_s \in \text{Sym}(R)$.

Beweis. Offenbar ist $\eta(s; t) = \eta(s; sts)$, und es folgt

$$\pi_s^2(t, \varepsilon) = \pi_s(sts, \varepsilon \eta(s; t)) = (ssts, \varepsilon \eta(s; t) \eta(s; sts)) = (t, \varepsilon).$$

Also ist π_s eine Involution und damit eine Permutation. \square

Für $w \in W$ mit $w = s_1 s_2 \cdots s_k$ definieren wir $\eta(w; t) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\#(s_1 s_2 \cdots s_k; t)}$.

LEMMA 1.23

Für $w \in W$ und $t \in T$ ist $\eta(w; t)$ wohldefiniert, also unabhängig von der konkreten Wahl eines Wortes für w .

Beweis. Seien $s, s' \in S$ mit $m(s, s') = p < \infty$. Wir zeigen zunächst, dass $(\pi_s \pi_{s'})^p = \text{id}_R$. Wir setzen

$$a_i = \begin{cases} s, & \text{wenn } i \text{ gerade ist,} \\ s', & \text{wenn } i \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Dann ist $\hat{T}(a_1 a_2 \cdots a_{2p}) = (t_1, t_2, \dots, t_{2p})$ mit $t_i = a_1 a_2 \cdots a_i \cdots a_{2p} a_1 = (s's)^{i-1} s'$ für $i \in [2p]$. Wegen $(s's)^p = e$ ist $t_{p+i} = t_i$ für $i \in [p]$, und es folgt, dass $\#(a_1 a_2 \cdots a_{2p}; t)$ für alle $t \in T$ gerade ist.

Für $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ gilt demnach mit Lemma 1.20 für alle $t \in T$:

$$\varepsilon \prod_{i=1}^{2p} \eta(a_i; a_{i-1} a_{i-2} \cdots a_1 t a_1 \cdots a_{i-2} a_{i-1}) = \varepsilon (-1)^{\#(a_1 a_2 \cdots a_{2p}; t)} = \varepsilon.$$

Da $a_1 a_2 \cdots a_{2p} = (s's)^p = e$ gilt, folgt $a_{2p} a_{2p-1} \cdots a_1 t a_1 \cdots a_{2p-1} a_{2p} = t$ für alle $t \in T$, und insbesondere ist $(\pi_s \pi_{s'})^p(t, \varepsilon) = (t, \varepsilon)$ für alle $(t, \varepsilon) \in R$.

Mit der Universalitätseigenschaft von (W, S) (Bemerkung 1.6) lässt sich die Abbildung $s \mapsto \pi_s$ also eindeutig zu einem Gruppenhomomorphismus $w \mapsto \pi_w$ fortsetzen. Wenn $w = s_1 s_2 \cdots s_k$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned} \pi_w(t, \varepsilon) &= \pi_{s_1} \pi_{s_2} \cdots \pi_{s_k}(t, \varepsilon) \\ &= \left(s_1 s_2 \cdots s_k t s_k \cdots s_2 s_1, \varepsilon \prod_{i=1}^k \eta(s_i; s_{i+1} \cdots s_k t s_k \cdots s_{i+1}) \right) \\ &= \left(w t w^{-1}, \varepsilon (-1)^{\#(s_k \cdots s_2 s_1; t)} \right). \end{aligned}$$

Somit hängt die Parität von $\#(s_k \cdots s_2 s_1; t)$ nur von w und t ab, und $\eta(w; t)$ ist wohldefiniert. \square

Aus dem Beweis von Lemma 1.23 folgt nun

$$(1) \quad \pi_w(t, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (wtw^{-1}, \varepsilon\eta(w^{-1}; t)).$$

SATZ 1.24

Sei (W, S) ein Coxeter-System.

- (i) Der Gruppenhomomorphismus $w \mapsto \pi_w$ ist injektiv.
- (ii) Für alle $t \in T$ gilt $\pi_t(t, \varepsilon) = (t, -\varepsilon)$.

Beweis. (i) Sei $w \neq e$ und sei $w = s_1s_2 \cdots s_k$ für k minimal. Durch Lemma 1.19 wissen wir, dass die Elemente von $\hat{T}(s_1s_2 \cdots s_k) = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ paarweise verschieden sind; somit ist $\#(w; t_i) = 1$ für alle $i \in [k]$. Also ist $\pi_w(t_i, \varepsilon) = (wt_iw^{-1}, -\varepsilon)$, und es folgt, dass $\pi_w \neq \text{id}_R$.

(ii) Sei $t \in T$. Dann können wir $t = s_1s_2 \cdots s_k \cdots s_2s_1$ als symmetrisches Wort über S schreiben. Wir verwenden Induktion nach k .

Der Induktionsanfang $k = 1$ ist per Definition erfüllt, da in dem Fall $t \in S$ gilt. Nehmen wir also an, dass $k > 1$ und dass die Behauptung für alle Spiegelungen gilt, die sich durch ein symmetrisches Wort mit weniger als $2k - 1$ Buchstaben darstellen lassen. Mit Lemma 1.20 folgt

$$\begin{aligned} \pi_{s_1s_2 \cdots s_k \cdots s_2s_1}(s_1s_2 \cdots s_k \cdots s_2s_1, \varepsilon) &= \pi_{s_1} \pi_{s_2 \cdots s_k \cdots s_2}(s_2 \cdots s_k \cdots s_2, \varepsilon\eta(s_1; s_1s_2 \cdots s_k \cdots s_2s_1)) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \pi_{s_1}(s_2 \cdots s_k \cdots s_2, -\varepsilon\eta(s_1; s_1s_2 \cdots s_k \cdots s_2s_1)) \\ &= \pi_{s_1}(s_2 \cdots s_k \cdots s_2, -\varepsilon\eta(s_1; s_2 \cdots s_k \cdots s_2)) \\ &= (s_1s_2 \cdots s_k \cdots s_2s_1, -\varepsilon\eta^2(s_1; s_2 \cdots s_k \cdots s_2)) \\ &= (s_1s_2 \cdots s_k \cdots s_2s_1, -\varepsilon). \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 1.25

Wir betrachten A_2 mit den Coxeter-Erzeugern $\{s_1, s_2\}$. Nach Konstruktion ist $T = \{s_1, s_1s_2s_1, s_2\}$ und $W = \{e, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1\}$. Die Abbildungen π_w für $w \in A_2$ haben folgende Form:

| | π_e | π_{s_1} | π_{s_2} | $\pi_{s_1s_2}$ | $\pi_{s_2s_1}$ | $\pi_{s_1s_2s_1}$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $(s_1, 1)$ | $(s_1, 1)$ | $(s_1, -1)$ | $(s_1s_2s_1, 1)$ | $(s_2, 1)$ | $(s_1s_2s_1, -1)$ | $(s_2, -1)$ |
| $(s_2, 1)$ | $(s_2, 1)$ | $(s_1s_2s_1, 1)$ | $(s_2, -1)$ | $(s_1s_2s_1, -1)$ | $(s_1, 1)$ | $(s_1, -1)$ |
| $(s_1s_2s_1, 1)$ | $(s_1s_2s_1, 1)$ | $(s_2, 1)$ | $(s_1, 1)$ | $(s_1, -1)$ | $(s_2, -1)$ | $(s_1s_2s_1, -1)$ |
| $(s_1, -1)$ | $(s_1, -1)$ | $(s_1, 1)$ | $(s_1s_2s_1, -1)$ | $(s_2, -1)$ | $(s_1s_2s_1, 1)$ | $(s_2, 1)$ |
| $(s_2, -1)$ | $(s_2, -1)$ | $(s_1s_2s_1, -1)$ | $(s_2, 1)$ | $(s_1s_2s_1, 1)$ | $(s_1, -1)$ | $(s_1, 1)$ |
| $(s_1s_2s_1, -1)$ | $(s_1s_2s_1, -1)$ | $(s_2, -1)$ | $(s_1, -1)$ | $(s_1, 1)$ | $(s_2, 1)$ | $(s_1s_2s_1, 1)$ |

Wir können die Abbildungen π_w also wie folgt mit Permutationen in \mathfrak{S}_6 identifizieren:

$$\begin{aligned}\pi_e &\leftrightarrow \text{id}, & \pi_{s_1} &\leftrightarrow (14)(23)(56), & \pi_{s_2} &\leftrightarrow (13)(25)(46), \\ \pi_{s_1s_2} &\leftrightarrow (126)(345), & \pi_{s_2s_1} &\leftrightarrow (162)(354), & \pi_{s_1s_2s_1} &\leftrightarrow (15)(24)(36).\end{aligned}$$

2. DIE SCHWACHE ORDNUNG

2.1. Inversionen. Sei (W, S) ein Coxeter-System. Da W von S erzeugt wird, lässt sich jedes $w \in W$ als Wort $w = s_1s_2 \cdots s_k$ mit $s_i \in S$ für $i \in [k]$ darstellen. Wenn k minimal bzgl. dieser Eigenschaft ist, dann schreiben wir $\ell_S(w)$ anstelle von k , und nennen das die **LÄNGE** von w . Ein Wort für $w \in W$ (über S) der Länge $\ell_S(w)$ heißt **REDUZIERT**.

LEMMA 2.1

Für $u, v \in W$ gilt

- (i) $\ell_S(u) + \ell_S(v) \geq \ell_S(uv)$,
- (ii) $\ell_S(u) = \ell_S(u^{-1})$.

Beweis. (i) ist offensichtlich, und (ii) folgt da $\ell_S(u) \geq \ell_S(u^{-1})$ und umgekehrt. \square

DEFINITION 2.2

Sei (W, S) ein Coxeter-System. Für $w \in W$ definieren wir die **INVERSIONSMENGE**, bzw. die **ABSTIEGSMENGE** als

$$\begin{aligned}\text{Inv}(w) &\stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T \mid \ell_S(tw) < \ell_S(w)\}, \\ \text{Des}(w) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Inv}(w) \cap S.\end{aligned}$$

BEISPIEL 2.3

Sei $W = A_n$. Aus Beispiel 1.10 wissen wir, dass A_n der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_{n+1} entspricht, und dass S die Menge aller benachbarten Transpositionen ist, und T die Menge aller Transpositionen. Sei also $w \in A_n$ eine Permutation, und $t = (ij) \in T$ eine Transposition. In der Zeilennotation von w bewirkt eine Linksmultiplikation mit t eine Vertauschung der Einträge i und j , und eine Rechtsmultiplikation mit t eine Vertauschung der Werte $w(i)$ und $w(j)$. Dementsprechend ist die Inversionsmenge von w gerade

$$\text{Inv}(w) = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n + 1, w(i) > w(j)\}.$$

Wir möchten nun zeigen, dass die Inversionsordnung aus Definition 1.18 bzgl. eines reduzierten Wortes für $w \in W$ tatsächlich eine lineare Ordnung von $\text{Inv}(w)$ darstellt.

LEMMA 2.4

Für $w \in W$ und $t \in T$ gilt $\ell_S(tw) < \ell_S(w)$ genau dann, wenn $\eta(w;t) = -1$.

Beweis. Sei dazu zunächst $\eta(w;t) = -1$. Wir wählen ein reduziertes Wort $w = s_1s_2 \cdots s_k$; da $\#(s_1s_2 \cdots s_k; t)$ ungerade ist, muss also $s_1s_2 \cdots s_i \cdots s_2s_1 = t$ für ein $i \in [k]$ gelten. Also ist

$$\ell_S(tw) = \ell_S(s_1s_2 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k) < k = \ell_S(w).$$

Sei nun $\eta(w;t) = 1$. Mit (1) und Satz 1.24(ii) erhalten wir

$$\begin{aligned} (w^{-1}tw, \varepsilon\eta(tw;t)) &= \pi_{(tw)^{-1}}(t, \varepsilon) = \pi_{w^{-1}}\pi_t(t, \varepsilon) \\ &= \pi_{w^{-1}}(t, -\varepsilon) = (w^{-1}tw, -\varepsilon\eta(w;t)) = (w^{-1}tw, -\varepsilon). \end{aligned}$$

Also ist $\eta(tw;t) = -1$, und analog zu oben folgt $\ell_S(w) = \ell_S(ttw) < \ell_S(tw)$. \square

KOROLLAR 2.5

Sei $w = s_1s_2 \cdots s_k$ und sei $t \in T$. Wenn $\ell_S(tw) < \ell_S(w)$ ist, dann folgt $tw = s_1s_2 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k$ für ein $i \in [k]$.

Beweis. Mit Lemma 2.4 folgt aus $\ell_S(tw) < \ell_S(w)$, dass $\eta(w;t) = -1$, und damit ist $\#(s_1s_2 \cdots s_k; t)$ ungerade. Also gibt es ein $i \in [k]$ sodass $t = s_1s_2 \cdots s_i \cdots s_2s_1$ gilt, und die Behauptung folgt. \square

SATZ 2.6

Sei (W, S) ein Coxeter-System und sei $w \in W$ mit $w = s_1s_2 \cdots s_k$ reduziert. Für $t \in T$ ist $t \in \text{Inv}(w)$ genau dann, wenn $t = s_1s_2 \cdots s_i \cdots s_2s_1$ für ein eindeutiges $i \in [k]$.

Beweis. Sei zunächst $t = s_1s_2 \cdots s_i \cdots s_2s_1$ für $i \in [k]$. Dann ist $tw = s_1s_2 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k$, also $\ell_S(tw) = k - 1 < \ell_S(w)$. Es folgt, dass $t \in \text{Inv}(w)$.

Sei nun $t \in \text{Inv}(w)$. Nach Definition 2.2 ist $\ell_S(tw) < \ell_S(w)$, und Korollar 2.5 impliziert $t = s_1s_2 \cdots s_i \cdots s_2s_1$ für ein $i \in [k]$. Da $s_1s_2 \cdots s_k$ reduziert ist, folgt aus Lemma 1.19, dass dieser Index eindeutig ist. \square

KOROLLAR 2.7

Für $w \in W$ gilt $\ell_S(w) = \#\text{Inv}(w)$.

Beweis. Sei $w = s_1 s_2 \cdots s_k$ reduziert. Satz 2.6 besagt, dass $\text{Inv}(w) = \{s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_2 s_1 \mid i \in [k]\}$ ist, und Lemma 1.19 besagt, dass $\#\text{Inv}(w) = k$ ist. \square

BEISPIEL 2.8

Sei $W = A_5$ und $w = [3, 5, 1, 2, 6, 4]$. Nach Beispiel 2.3 ist

$$\text{Inv}(w) = \{(1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (2\ 6), (5\ 6)\}.$$

Wir können uns leicht überlegen, dass $w = s_2 s_1 s_3 s_2 s_5 s_4$ ist, und die zugehörige Inversionsordnung ist

$$(2\ 3) < (1\ 3) < (2\ 4) < (1\ 4) < (5\ 6) < (2\ 6).$$

Wir können aber ebenso $w = s_5 s_2 s_1 s_3 s_4 s_2$ schreiben; die zugehörige Inversionsordnung ist dann

$$(5\ 6) < (2\ 3) < (1\ 3) < (2\ 4) < (2\ 6) < (1\ 4).$$

2.2. Eigenschaften der Schwachen Ordnung.

DEFINITION 2.9

Sei (W, S) ein Coxeter-System. Die **SCHWACHE ORDNUNG** auf (W, S) ist die Ordnungsrelation auf W , für die $u \leq_S v$ genau dann gilt, wenn $\ell_S(u) + \ell_S(u^{-1}v) = \ell_S(v)$.

BEMERKUNG 2.10

Offenbar gilt $u \leq_S v$ genau dann, wenn es ein $u' \in W$ gibt sodass $v = uu'$ und $\ell_S(v) = \ell_S(u) + \ell_S(u')$ gilt. Wir haben also soeben die *rechts-schwache* Ordnung definiert. Man kann analog auch eine links-schwache Ordnung definieren. Allerdings sind beide Ordnungen isomorph vermöge der Abbildung $w \mapsto w^{-1}$.

Abbildung 2 zeigt die schwache Ordnung auf A_3 , und Abbildung 3 zeigt die schwache Ordnung auf $I_2(m)$ mit $m < \infty$. Für $u, v \in W$ schreiben wir $[u, v]_S \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in W \mid u \leq_S w \leq_S v\}$. Die nachstehenden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition.

KOROLLAR 2.11

- (i) Die geordnete Menge (W, \leq_S) ist gradiert mit mit Rangfunktion ℓ_S .
- (ii) Die Menge aller reduzierten Worte für $w \in W$ ist in Bijektion mit der Menge aller maximaler Ketten im Intervall $[e, w]_S$.

Beweis. (i) Offenbar ist $\ell_S(e) = 0$ und wenn $u \leq_S v$ gilt, dann muss es ein $s \in S$ geben, sodass $v = us$. Also ist $\ell_S(v) = \ell_S(u) + 1$, und damit ist ℓ_S eine Rangfunktion von (W, \leq_S) .

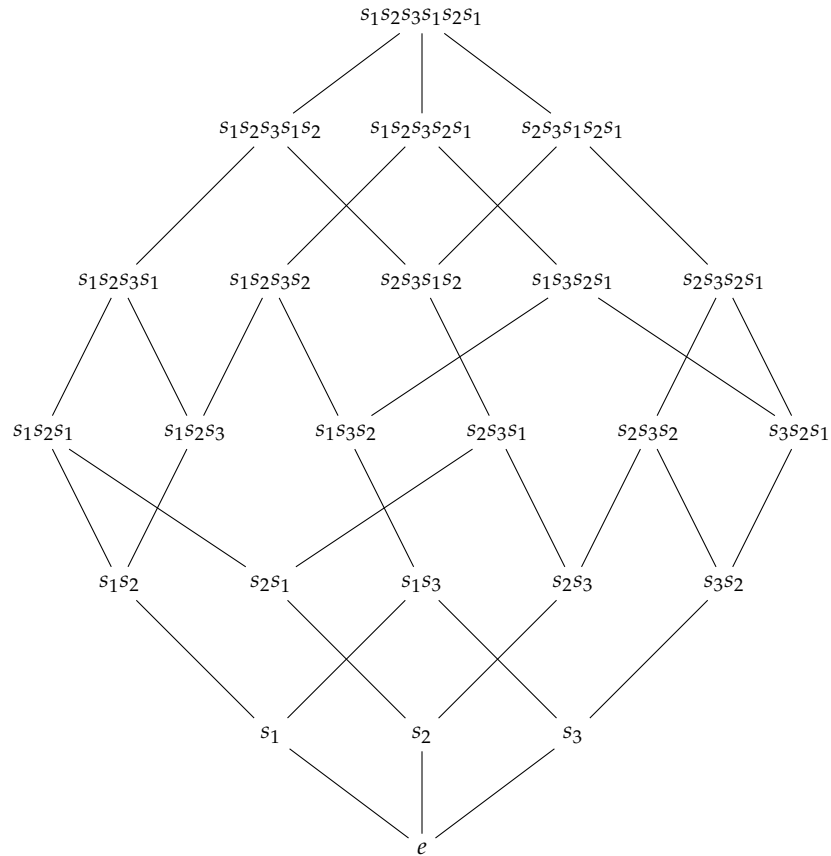


ABBILDUNG 2. Die schwache Ordnung auf A_3 .

(ii) Eine maximale Kette in $[e, w]_S$ ist nach (i) von der Form $e = x_0 \leq_S x_1 \leq_S \dots \leq_S x_k = w$, und es gibt demnach Coxeter-Erzeuger s_1, s_2, \dots, s_k sodass $x_i = x_{i-1}s_i$ für $i \in [k]$. Damit ist

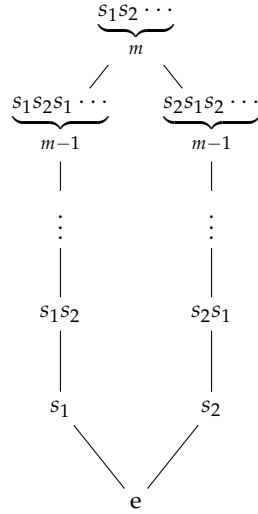
$$w = x_k = x_{k-1}s_k = x_{k-2}s_{k-1}s_k = \dots = s_1s_2 \dots s_k$$

ein reduziertes Wort für w . Umgekehrt lässt sich für $w = s_1s_2 \dots s_k$ eine maximale Kette in $[e, w]_S$ vermöge $x_i = s_1s_2 \dots s_i$ definieren. \square

Wir zeigen nun, dass die schwache Ordnung im Wesentlichen der Inklusion auf Inversionsmengen entspricht.

PROPOSITION 2.12

Für alle $u, v \in W$ gilt $u \leq_S v$ genau dann, wenn $\text{Inv}(u) \subseteq \text{Inv}(v)$.


 ABBILDUNG 3. Die schwache Ordnung auf $I_2(m)$ mit $m < \infty$.

Beweis. Wenn $u \leq_S v$ gilt, dann gibt es reduzierte Worte $u = s_1 s_2 \cdots s_k$ und $v = s_1 s_2 \cdots s_k s_{k+1} \cdots s_l$. Nach Satz 2.6 gilt

$$\begin{aligned} \text{Inv}(u) &= \{s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_2 s_1 \mid i \in [k]\} \\ &\subseteq \{s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_2 s_1 \mid i \in [l]\} \\ &= \text{Inv}(v). \end{aligned}$$

Seien nun umgekehrt $u, v \in W$ mit $\text{Inv}(u) \subseteq \text{Inv}(v)$, sowie $\ell_S(u) = k$ und $\ell_S(v) = l$ mit $k \leq l$. Wir wählen ein reduziertes Wort $u = s_1 s_2 \cdots s_k$ und setzen $t_i = s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_2 s_1$ für $i \in [k]$. Nach Annahme ist $t_i \in \text{Inv}(v)$ für $i \in [k]$.

Wir zeigen nun per Induktion, dass es für alle $0 \leq i \leq k$ ein reduziertes Wort $v = s_1 s_2 \cdots s_i s'_1 s'_2 \cdots s'_{l-i}$ gibt. Der Induktionsanfang $i = 0$ ist trivialerweise erfüllt. Nehmen wir also an, dass die Behauptung für ein beliebiges, festes $0 \leq i < k$ gilt. Nach Annahme ist $t_{i+1} \in \text{Inv}(v)$, und nach Lemma 1.19 ist $t_j \neq t_{i+1}$ für alle $j \leq i$. Es muss also

$$t_{i+1} = s_1 s_2 \cdots s_i s'_1 s'_2 \cdots s'_m \cdots s'_2 s'_1 \cdots s_2 s_1$$

für ein $m \in [l - i]$ gelten. Damit folgt

$$\begin{aligned} w &= t_{i+1}^2 w \\ &= (s_1 s_2 \cdots s_{i+1} \cdots s_2 s_1)(s_1 s_2 \cdots s_i s'_1 s'_2 \cdots s'_m \cdots s'_{l-i}) \\ &= s_1 s_2 \cdots s_{i+1} s'_1 s'_2 \cdots s'_m \cdots s'_{l-i}, \end{aligned}$$

und das ist offenbar ein Wort der Länge l . Es folgt, dass es ein reduziertes Wort $v = s_1 s_2 \cdots s_k s'_1 s'_2 \cdots s'_{l-k}$ gibt, und somit gilt $u \leq_S v$. \square

KOROLLAR 2.13

Die Abbildung $w \mapsto \text{Inv}(w)$ ist eine ordnungs- und rangerhaltende Einbettung von (W, \leq_S) in den Potenzmengenverband von T .

PROPOSITION 2.14

Für alle $u, v \in W$ mit $u \leq_S v$ gilt $[u, v]_S \cong [e, u^{-1}v]_S$.

Beweis. Offenbar gilt $\ell_S(uv) \leq \ell_S(u) + \ell_S(v)$ für beliebige $u, v \in W$. Seien nun $u, v \in W$ mit $u \leq_S v$. Wir zeigen, dass die Abbildung $x \mapsto ux$ der gewünschte Ordnungsisomorphismus ist. Es gilt

$$\ell_S(v) = \ell_S(u) + \ell_S(u^{-1}v) \stackrel{(a)}{\leq} \ell_S(u) + \ell_S(x) + \ell_S(x^{-1}u^{-1}v) \stackrel{(b)}{\geq} \ell_S(ux) + \ell_S((ux)^{-1}v) \stackrel{(c)}{\geq} \ell_S(v),$$

und es folgt aus der Definition:

$$\begin{aligned} x \leq_S u^{-1}v &\iff \text{Gleichheit in (a)} \\ &\iff \text{Gleichheit in (b) und (c)} \\ &\iff u \leq_S ux \leq_S v. \end{aligned}$$

Damit ist $x \mapsto ux$ wohldefiniert, ordnungserhaltend und ordnungsumkehrend als Abbildung von $[e, u^{-1}v]_S$ nach $[u, v]_S$. Da es sich um Multiplikation mit einem festen Gruppenelement handelt, ist sie außerdem injektiv. Analog zeigt man dass $x \mapsto u^{-1}x$ die zugehörige Umkehrabbildung ist. \square

SATZ 2.15

Sei (W, S) ein Coxeter-System. Die geordnete Menge (W, \leq_S) ist ein Infimum-Halbverband.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass für alle $u, v \in W$ die folgende Behauptung gilt:

(2) Wenn $s \in \text{Des}(u) \cap \text{Des}(v)$, dann gilt $u \leq_S v$ genau dann, wenn $su \leq_S sv$.

Aus $s \in \text{Des}(u) \cap \text{Des}(v)$ folgt nach Definition 2.2, dass $\ell_S(su) = \ell_S(u) - 1$ und $\ell_S(sv) = \ell_S(v) - 1$. Aus der Definition folgt:

$$\begin{aligned} u \leq_S v &\iff \ell_S(u) + \ell_S(u^{-1}v) = \ell_S(v) \\ &\iff \ell_S(su) + 1 + \ell_S((su)^{-1}sv) = \ell_S(sv) + 1 \\ &\iff su \leq_S sv. \end{aligned}$$

Seien nun $u, v \in W$. Es gilt offenbar, dass e eine untere Schranke von u und v ist. Wir wollen zeigen, dass eine größte untere Schranke $u \wedge_S v$ existiert, und verwenden Induktion nach $\ell_S(u)$. Wenn es kein $s \in S$ gibt, mit $s \leq_S u$ und $s \leq_S v$ ist, dann ist e die einzige untere Schranke von u und v , und es gilt $u \wedge_S v = e$. (Jede nichttriviale untere Schranke von u und v muss über einem Coxeter-Erzeuger liegen.) Wenn $\ell_S(u) = 0$ ist, dann ist $e = u \leq_S v$ und damit $u \wedge_S v = e$.

Nehmen wir also an, dass $\ell_S(u) > 0$ und $E = [e, u]_S \cap [e, v]_S \neq \{e\}$. Wir wählen $w \in E$ mit maximaler Länge und wollen zeigen, dass für alle $x \in E$ gilt, dass $x \leq_S w$ ist. Damit folgt unmittelbar, dass $u \wedge_S v = w$.

Wir zeigen erst, dass aus $s \in E \cap S$, stets $s \leq_S w$ folgt. Dazu wählen wir reduzierten Worte $w = s_1 s_2 \cdots s_k$, $u = s_1 s_2 \cdots s_k s'_1 s'_2 \cdots s'_p$ und $v = s_1 s_2 \cdots s_k s''_1 s''_2 \cdots s''_q$, sowie $s \in S \cap E$. Wenn $s \not\leq_S w$, dann ist offenbar $ss_1 s_2 \cdots s_k$ reduziert. Da $s \in E$ ist, folgt mit Proposition 2.12, dass $s \in \text{Inv}(u)$, und damit $\ell_S(su) < \ell_S(u)$. Mit Korollar 2.5 erhalten wir $su = s_1 s_2 \cdots s_k s'_1 s'_2 \cdots \hat{s}'_i \cdots s'_p$. (Die Löschung kann nicht unter den s_1, s_2, \dots, s_k erfolgen, da $ss_1 s_2 \cdots s_k$ reduziert ist.) Der analoge Schluss für v liefert, dass

$$\begin{aligned} u &= ss_1 s_2 \cdots s_k s'_1 s'_2 \cdots \hat{s}'_i \cdots s'_p, \\ v &= ss_1 s_2 \cdots s_k s''_1 s''_2 \cdots \hat{s}''_j \cdots s''_q, \end{aligned}$$

für eindeutige Indizes i, j , reduzierte Worte sind. Insbesondere ist $ss_1 s_2 \cdots s_k \in E$, was der Wahl von w widerspricht.

Sei weiter $x \in E \setminus \{e\}$ und $s \in \text{Des}(x)$. Proposition 2.12 impliziert, dass $s \in \text{Des}(u) \cap \text{Des}(v)$. Wir haben eben gezeigt, dass auch $s \in \text{Des}(w)$ ist. Nach Definition ist $\ell_S(su) < \ell_S(u)$, und nach Induktionsvoraussetzung existiert $w' = su \wedge_S sv$, und es gilt $s \notin \text{Des}(w')$. Da $w \leq_S u$ ist, folgt aus (2), dass $sw \leq_S su$ und analog $sw \leq_S sv$. Also ist $sw \leq_S w'$. GleichermäÙen zeigen wir, dass $sx \leq_S w'$. Weiterhin, da $w' \leq_S su$ gilt, folgt mit (2) $sw' \leq_S u$, und analog $sw' \leq_S v$. Also ist $sw' \in E$ und es folgt $\ell_S(sw') \leq \ell_S(w)$.

Damit folgt

$$\ell_S(sw) = \ell_S(w) - 1 \geq \ell_S(sw') - 1 = \ell_S(w'),$$

und das kombiniert mit $sw \leq_S w'$ ergibt $sw = w'$. Also ist $sx \leq_S sw$ und mit (2) folgt $x \leq_S w$. \square

BEMERKUNG 2.16

Da jedes Element in W endliche Länge hat, lässt sich sogar zeigen, dass das Intervall $[e, w]_S$ für beliebige $w \in W$ einen Verband bildet.

BEMERKUNG 2.17

Die Infimum-Struktur auf W bestimmt bereits die Gruppenstruktur. Aus der Infimum-Struktur von W können wir die schwache Ordnung rekonstruieren. Die Atome von (W, \leq_S) sind gerade die Coxeter-Erzeuger, und es gilt $m(s, s') = \ell_S(s \vee s')$, wobei wir $m(s, s') = \infty$ setzen, falls dieses Supremum nicht existiert.

2.3. Das längste Element.

DEFINITION 2.18

Sei (W, S) ein Coxeter-System, und seien $u, v \in W$ mit $\ell_S(u) = k$ und $\ell_S(v) = l$. Wenn es ein reduziertes Wort $v = s_1 s_2 \cdots s_l$ gibt, sodass $u = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq l$ ist, dann ist u ein **UNTERWORT** von v . Wenn zudem $k < l$ gilt, dann ist u ein **ECHTES** Unterwort von v .

PROPOSITION 2.19

Sei u ein echtes Unterwort von v , sodass $s \in \text{Des}(v) \setminus \text{Des}(u)$. Dann ist u ein Unterwort von sv und su ein Unterwort von v .

Beweis. Sei $sv = s_1 s_2 \cdots s_l$ reduziert. Da $s \in \text{Des}(v)$ ist $v = s s_1 s_2 \cdots s_l$ ebenfalls reduziert. Nach Voraussetzung gibt es ein reduziertes Wort $u = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq l$. Wegen $s \neq s_{i_1}$ ist u ein echtes Unterwort von su , und die Behauptungen folgen sofort. \square

PROPOSITION 2.20

Seien $u, v \in W$. Dann gibt es $w \in W$, sodass u und v Unterworte von w sind.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion über $\ell_S(u) + \ell_S(v)$. Der Induktionsanfang $\ell_S(u) + \ell_S(v) = 0$ ist sofort klar, denn dann ist $u = v = w = e$. Nehmen wir also an, dass die Behauptung für alle Elemente gilt, deren Längen sich zu $k \geq 0$ aufsummieren.

Seien nun $u, v \in W$ mit $\ell_S(u) + \ell_S(v) = k + 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $u \neq e$, und es gibt also ein $s \in S$ sodass su ein echtes Unterwort von u ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $w' \in W$, sodass su, v Unterworte von w' sind. Insbesondere ist $s \notin \text{Des}(su)$.

Wenn $s \in \text{Des}(w')$ ist, dann ist su ein echtes Unterwort von w' , und mit Proposition 2.19 folgt, dass u ein Unterwort von w' ist. Die Behauptung gilt also mit $w = w'$.

Wenn $s \notin \text{Des}(w')$ ist, dann ist su ein echtes Unterwort von sw' , und mit Proposition 2.19 folgt, dass u ein Unterwort von sw' ist. Die Behauptung gilt also mit $w = sw'$. \square

PROPOSITION 2.21

Wenn (W, S) endlich ist, dann existiert ein eindeutiges Element w_\circ , mit $\ell_S(w_\circ) = \max\{\ell_S(w) \mid w \in W\}$. Insbesondere ist jedes $w \in W$ ein Unterwort von w_\circ und $\text{Des}(w_\circ) = S$.

Beweis. Proposition 2.20 besagt im Wesentlichen, dass je zwei Elemente eine obere Schranke bzgl. der Unterwort-Relation haben. Wenn W endlich ist, muss es demnach ein eindeutiges maximales Element geben. Dieses Element hat offenbar maximale Länge.

Sei nun $s \in S$. Da $\ell_S(w_\circ)$ maximal ist, ist $\ell_S(sw_\circ) < \ell_S(w_\circ)$, und nach Definition 2.2 ist $s \in \text{Inv}(w_\circ)$, also $s \in \text{Des}(w_\circ)$. Es folgt $\text{Des}(w_\circ) = S$. \square

PROPOSITION 2.22

Das längste Element w_\circ einer endlichen Coxeter-Gruppe W hat die folgenden Eigenschaften.

- (i) w_\circ ist eine Involution.
- (ii) Für alle $w \in W$ gilt $\ell_S(ww_\circ) = \ell_S(w_\circ) - \ell_S(w)$.
- (iii) Für alle $w \in W$ gilt $\text{Inv}(ww_\circ) = T \setminus \text{Inv}(w)$.
- (iv) $\ell_S(w_\circ) = \#T$.

Beweis. (i) Das folgt aus der Eindeutigkeit von w_\circ und Lemma 2.1(ii).

(ii) Mit Lemma 2.1 folgt $\ell_S(w) + \ell_S(ww_\circ) = \ell_S(w^{-1}) + \ell_S(ww_\circ) \geq \ell_S(w_\circ)$. Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, verwenden wir Induktion nach $\ell_S(w_\circ) - \ell_S(w)$. Für den Induktionsanfang sei also $\ell_S(w_\circ) - \ell_S(w) = 0$. Damit folgt aber $w = w_\circ$ aus Proposition 2.21, und mit (i) folgt weiter $ww_\circ = w_\circ^2 = e$, also $\ell_S(ww_\circ) = 0$ wie gewünscht.

Nehmen wir nun an, dass die Behauptung für alle $w' \in W$ gilt mit $\ell_S(w_\circ) - \ell_S(w') = k$ für ein beliebiges, festes $k \geq 0$. Sei $w \in W$ derart, dass $\ell_S(w_\circ) - \ell_S(w) = k + 1$. Insbesondere ist w ein echtes Unterwort von w_\circ , und Proposition 2.21 ermöglicht es uns ein $s \in S$ zu finden, sodass $\ell_S(sw) = \ell_S(w) + 1$ ist. (Andernfalls wäre $\text{Des}(w) = S$ im Widerspruch zu $w \neq w_\circ$.) Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\ell_S(ww_\circ) \leq \ell_S(sw w_\circ) + 1 \leq \ell_S(w_\circ) - \ell_S(sw) + 1 = \ell_S(w_\circ) - (\ell_S(w) + 1) + 1 = \ell_S(w_\circ) - \ell_S(w).$$

Wir haben also $\ell_S(ww_\circ) + \ell_S(w) \leq \ell_S(w_\circ)$ gezeigt, und die Gleichheit folgt.

(iii) Sei $t \in T$. Aus (ii) folgt

$$\begin{aligned} \ell_S(tw) < \ell_S(w) &\iff \ell_S(w_\circ) - \ell_S(tww_\circ) < \ell_S(w_\circ) - \ell_S(ww_\circ) \\ &\iff \ell_S(ww_\circ) < \ell_S(tww_\circ), \end{aligned}$$

und damit $t \in \text{Inv}(w)$ genau dann, wenn $t \notin \text{Inv}(ww_\circ)$, wie gewünscht.

(iv) Aus (iii) und Korollar 2.7 folgt $\ell_S(w_\circ) = \#\text{Inv}(w_\circ) = \#(T \setminus \text{Inv}(e)) = \#T$. \square

KOROLLAR 2.23

Wenn (W, S) endlich ist, dann ist (W, \leq_S) ein Verband.

2.4. Coxeter-Catalan-Zahlen.

DEFINITION 2.24

Sei (W, S) ein Coxeter-System, und sei $X \subseteq W$. Die **POINCARÉ-REIHE** von X ist

$$X(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{w \in X} q^{\ell_S(w)}.$$

Wenn X endlich ist, ist $X(q)$ sogar ein Polynom.

BEISPIEL 2.25

Sei $W = I_2(m)$ mit $m < \infty$. Aus Abbildung 3 wissen wir, dass es genau ein Element der Länge 0 und m gibt, sowie je zwei Elemente der Länge i mit $i \in [m-1]$. Also ist

$$W(q) = 1 + 2q + 2q^2 + \cdots + 2q^{m-1} + q^m = (1+q)(1+q+q^2+\cdots+q^{m-1}).$$

BEISPIEL 2.26

Sei $W = A_n$. Aus Korollar 2.7 wissen wir, dass $\ell_S(w) = \#\text{Inv}(w)$ ist, und aus Beispiel 2.3 folgt, dass die Inversionen von $w \in A_n$ genau die Paare von Positionen in der Zeilennotation von w sind, deren Einträge nicht aufsteigend sortiert sind. Es folgt direkt, dass $0 \leq \ell_S(w) \leq \binom{n+1}{2}$ gilt.

Sei $w \in A_n$. Dann gibt es einen eindeutigen Index $i \in [n+1]$ mit $w(i) = 1$. Wenn wir in der Zeilennotation von w die 1 streichen, und die übrigen Einträge um eins reduzieren, erhalten wir eine Permutation $w' \in A_{n-1}$, und es gilt

$$\#\text{Inv}(w) = \#\text{Inv}(w') + i - 1.$$

Sei $X_{n,i} = \{w \in A_n \mid w(i) = 1\}$. Die Konstruktion von oben ist eine Bijektion von $X_{n,i}$ nach A_{n-1} . Also gilt

$$\begin{aligned} A_n(q) &= \sum_{w \in A_n} q^{\ell_S(w)} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{w \in X_{n,i}} q^{\ell_S(w)} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{w \in A_{n-1}} q^{\ell_S(w)+i-1} \\ &= \sum_{i=0}^n q^i \sum_{w \in A_{n-1}} q^{\ell_S(w)} = \sum_{i=0}^n q^i A_{n-1}(q). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$A_n(q) = \prod_{j=1}^n (1 + q + q^2 + \cdots + q^j).$$

In den Beispielen 2.25 und 2.26 haben wir gesehen, dass das Poincaré-Polynom sich schön zerlegen lässt. Das ist kein Zufall, sondern gilt allgemein für endliche irreduzible Coxeter-Gruppen.

| W | $\deg(W)$ |
|----------|--------------------------------|
| A_n | $2, 3, \dots, n+1$ |
| B_n | $2, 4, \dots, 2n$ |
| D_n | $2, 4, \dots, 2n-2, n$ |
| E_6 | $2, 5, 6, 8, 9, 12$ |
| E_7 | $2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$ |
| E_8 | $2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$ |
| F_4 | $2, 6, 8, 12$ |
| H_3 | $2, 6, 10$ |
| H_4 | $2, 12, 20, 30$ |
| $I_2(m)$ | $2, m$ |

TABELLE 1. Die Grade der endlichen, irreduziblen Coxeter-Gruppen.

SATZ 2.27: [1, 10]

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System vom Rang n . Dann gibt es natürliche Zahlen e_1, e_2, \dots, e_n sodass gilt

$$W(q) = \prod_{i=1}^n (1 + q + q^2 + \dots + q^{e_i}).$$

Beweisidee. Für $W = I_2(m)$ bzw. $W = A_n$ folgt die Behauptung aus den Beispielen 2.25 und 2.26. Für die Ausnahmegruppen $E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$ lässt sich die Aussage explizit nachprüfen. Für die unendlichen Familien B_n und D_n lassen sich geeignete Permutationsmodelle finden, sodass ein Nachweis der gewünschten Eigenschaft analog zu A_n erfolgen kann. \square

DEFINITION 2.28

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System vom Rang n . Die Zahlen e_1, e_2, \dots, e_n aus Satz 2.27 heißen **EXPONENTEN** von (W, S) . Die Zahlen $e_1 + 1, e_2 + 1, \dots, e_n + 1$ heißen **GRADE** von (W, S) .

Wir schreiben $\deg(W)$ für die Menge der Grade von (W, S) . Tabelle 1 listet die Grade der endlichen, irreduziblen Coxeter-Gruppen auf.

| W | A_n | B_n | D_n | E_6 | E_7 | E_8 | F_4 | H_3 | H_4 | $I_2(m)$ |
|-----------------|-----------------------------------|-----------------|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\text{Cat}(W)$ | $\frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$ | $\binom{2n}{n}$ | $\frac{3n-2}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ | 833 | 4160 | 25080 | 105 | 32 | 280 | $m+2$ |

TABELLE 2. Die Catalan-Zahlen der endlichen, irreduziblen Coxeter-Gruppen.

KOROLLAR 2.29

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System. Dann gilt

$$\begin{aligned} \#W &= \prod_{d \in \text{deg}(W)} d, \\ \#T &= \sum_{d \in \text{deg}(W)} (d-1). \end{aligned}$$

Beweis. Offenbar ist $\#W = W(1)$. Der i -te Faktor von $W(q)$ aus Satz 2.27 besteht aus d_i Summanden, und die erste Behauptung folgt. Nach Proposition 2.22(iv) ist $\#T = \ell_S(w_\circ)$, und der größte Exponent in $W(q)$ ist gerade $\sum_{d \in \text{deg}(W)} (d-1)$. \square

DEFINITION 2.30

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System, und sei $h = \max \text{deg}(W)$. Die **COXETER-CATALAN-ZAHL** von (W, S) ist

$$\text{Cat}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{d \in \text{deg}(W)} \frac{d+h}{d}.$$

Tabelle 2 zeigt die Coxeter-Catalan-Zahlen.

BEMERKUNG 2.31

Insbesondere ist $\text{Cat}(A_{n-1}) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ gerade die n -te **CATALAN-ZAHL**.

3. NICHTKREUZENDE PARTITIONEN

3.1. Die Absolute Ordnung. Per Definition wird W von S erzeugt, und da $S \subseteq T$ ist, wird W auch von T erzeugt. Dementsprechend können wir jedes $w \in W$ als $w = t_1 t_2 \cdots t_k$ mit $t_i \in T$ für $i \in [k]$ schreiben. Wenn k minimal bzgl. dieser Eigenschaft ist, dann schreiben wir ℓ_T anstelle von k , und nennen das die **ABSOLUTE LÄNGE** von w . Ein Wort für $w \in W$ (über T) heißt **T -REDUZIERT**. Lemma 2.1 gilt analog auch für ℓ_T . Offenbar ist $\ell_T(w) \leq \ell_S(w)$ für alle $w \in W$.

BEISPIEL 3.1

Sei $W = A_n$. Es ist bekannt, dass ein Zyklus der Länge k sich in mindestens $k - 1$ Transpositionen zerlegen lässt. Für $w \in W$ gilt demnach $\ell_T(w) = n - \text{cyc}(w)$, wobei $\text{cyc}(w)$ die Anzahl der Zyklen von w beschreibt.

LEMMA 3.2

Für alle $u, v \in W$ ist $\ell_T(v) = \ell_T(uvu^{-1})$.

Beweis. Nach Definition ist T unter Konjugation abgeschlossen. Sei also $v = t_1 t_2 \cdots t_k$ T -reduziert, und sei $u \in W$. Dann gilt offenbar $ut_i u^{-1} \in T$; also muss

$$uvu^{-1} = (ut_1 u^{-1})(ut_2 u^{-1}) \cdots (ut_k u^{-1}),$$

T -reduziert sein. Es folgt $\ell_T(uvu^{-1}) = k = \ell_T(v)$. \square

DEFINITION 3.3

Sei (W, S) ein Coxeter-System. Die **ABSOLUTE ORDNUNG** auf (W, S) ist die Ordnungsrelation auf W , für die $u \leq_T v$ genau dann gilt, wenn $\ell_T(u) + \ell_T(u^{-1}v) = \ell_T(v)$.

Für $u, v \in W$ schreiben wir $[u, v]_T \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in W \mid u \leq_T w \leq_T v\}$. Proposition 2.14 gilt analog auch für \leq_T .

PROPOSITION 3.4

Für alle $u, v \in W$ gilt $[e, v]_T \cong [e, uvu^{-1}]_T$.

Beweis. Das folgt mit Definition 3.3 und Lemma 3.2, da für alle $x, y, w \in W$ gilt:

$$\begin{aligned} x \leq_T y &\iff \ell_T(x) + \ell_T(x^{-1}y) = \ell_T(y) \\ &\iff \ell_T(wxw^{-1}) + \ell_T(wx^{-1}w^{-1}wyw^{-1}) = \ell_T(wyw^{-1}) \\ &\iff wxw^{-1} \leq_T wyw^{-1}. \end{aligned}$$

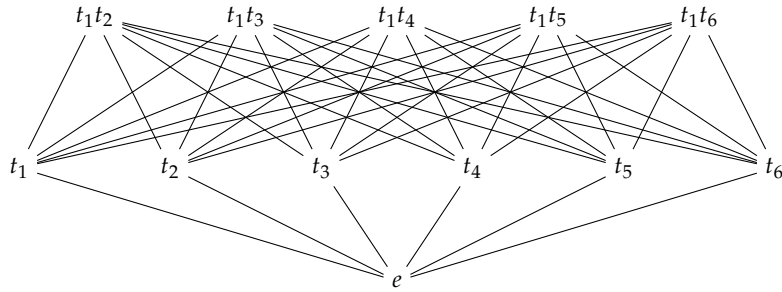


ABBILDUNG 4. Die absolute Ordnung auf $I_2(6)$.

□

BEISPIEL 3.5

Abbildung 4 zeigt die absolute Ordnung auf der endlichen Coxeter-Gruppe $I_2(6)$. Dabei verwenden wir die Abkürzungen

$$t_1 = s_1, \quad t_2 = s_1s_2s_1, \quad t_3 = s_1s_2s_1s_2s_1, \quad t_4 = s_2s_1s_2s_1s_2, \quad t_5 = s_2s_1s_2, \quad t_6 = s_2.$$

BEISPIEL 3.6

Abbildung 5 zeigt die absolute Ordnung auf der endlichen Coxeter-Gruppe A_3 . Dabei verwenden wir die Abkürzungen

$$t_1 = s_1, \quad t_2 = s_1s_2s_1, \quad t_3 = s_1s_2s_3s_2s_1, \quad t_4 = s_2, \quad t_5 = s_2s_3s_2, \quad t_6 = s_3.$$

3.2. Coxeter-Elemente.

DEFINITION 3.7

Sei (W, S) ein Coxeter-System vom Rang n und sei $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation. Ein Element $c \in W$ mit $c = s_{\sigma(1)}s_{\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(n)}$ ist ein **COXETER-ELEMENT**.

LEMMA 3.8

Sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Je zwei reduzierte Worte von c sind mit einer Folge von Kommutationen ineinander überführbar, und es gilt $\ell_S(c) = \#S = \ell_T(c)$.

Beweis. Nach Definition besitzt ein $c \in W$ ein reduziertes Wort, in dem kein Coxeter-Erzeuger mehrfach vorkommt. Mit Bemerkung 1.8 folgt, dass sich je zwei reduzierte Worte für c durch eine Folge von Zopf-Transformationen ineinander überführen lassen. Die möglichen Zopf-Transformationen können also nur Länge zwei haben; sind also Kommutationen.

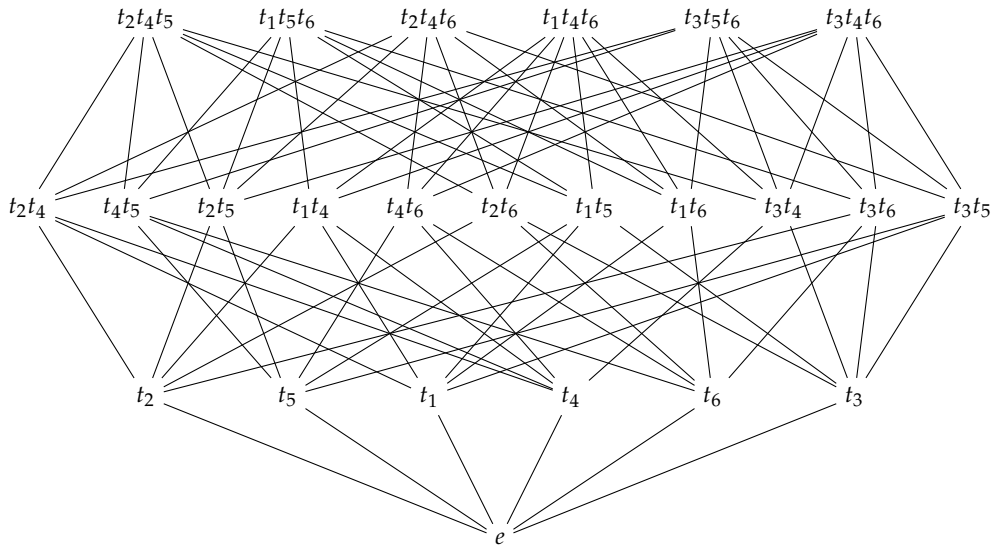


ABBILDUNG 5. Die absolute Ordnung auf A_3 .

Nach Definition gilt $\ell_S(c) = \#S$, und da kein Coxeter-Erzeuger mehrfach vorkommt, folgt $\ell_T(c) = \#S$. □

Eine **AZYKLISCHE ORIENTIERUNG** eines Graphen (V, E) ist eine Zuordnung von Richtungen zu den Kanten in E , sodass keine gerichteten Kreise entstehen.

DEFINITION 3.9

Eine **ORIENTIERUNG** eines Coxeter-Systems (W, S) ist eine azyklische Orientierung des zugehörigen Coxeter-Graphen.

BEMERKUNG 3.10

Wenn der Coxeter-Graph ein Baum ist, ist jede Orientierung azyklisch, und es gibt dementsprechend $2^{\#S-1}$ azyklische Orientierungen. Wenn der Coxeter-Graph ein Kreis ist, gibt es genau zwei zyklische Orientierungen, und es verbleiben $2^{\#S} - 2$ azyklische Orientierungen.

Wir zeigen zunächst, dass jedes Coxeter-Element eine azyklische Orientierung induziert. Dazu sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Wir orientieren eine Kante im Coxeter-Graphen von s nach s' , wenn es ein reduziertes Wort für c gibt, in dem s links von s' steht. Die entsprechende Orientierung von (W, S) bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_c(W)$. Nach Lemma 3.8 ist die Reihenfolge zweier Coxeter-Erzeuger s, s' in reduzierten Worten für c nur dann beliebig, wenn s, s' kommutieren. In dem Fall gibt es aber keine Kante zwischen s und s' im Coxeter-Graphen, sodass $\mathcal{O}_c(W)$ nicht von der konkreten Wahl eines reduzierten Wortes abhängt.

LEMMA 3.11

Seien $c_1 = s_1 s_2 \cdots s_n$ und $c_2 = s'_1 s'_2 \cdots s'_n$, mit $s_i, s'_i \in S$, reduzierte Worte zweier Coxeter-Elemente. Es ist genau dann $c_1 = c_2$ wenn für alle nicht-kommutierenden Coxeter-Erzeuger $s, s' \in S$ die Orientierung der Kante zwischen s und s' in $\mathcal{O}_{c_1}(W)$ und $\mathcal{O}_{c_2}(W)$ übereinstimmen.

Beweis. Wir haben bereits argumentiert, dass eine Orientierung von W nicht von der konkreten Wahl eines reduzierten Wortes für c abhängt.

Seien umgekehrt c_1 und c_2 zwei Coxeter-Elemente, die dieselbe Orientierung von W induzieren. Wir verwenden Induktion nach $\#S$. Wenn $\#S = 1$ ist, muss nichts gezeigt werden. Nehmen wir also an, dass die Behauptung für alle Coxeter-Systeme von kleinem Rang als n gilt. Seien $c = s_1 s_2 \cdots s_n$ und $c_2 = s'_1 s'_2 \cdots s'_n$. Nach Definition ist $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} = S = \{s'_1, s'_2, \dots, s'_n\}$, sodass es ein $i \in [n]$ gibt mit $s'_i = s_i$. Da $\mathcal{O}_{c_1}(W) = \mathcal{O}_{c_2}(W)$ ist, folgt $t_j t_i = t_i t_j$ für alle $j < i$. Insbesondere ist also $c_2 = s_1 s'_1 s'_2 \cdots s'_i \cdots s'_n$, und $s_1 c_1, s_1 c_2$ sind Coxeter-Elemente in der parabolische Untergruppe $W_{\langle s_1 \rangle}$. Offenbar ist aber auch $\mathcal{O}_{s_1 c_1}(W_{\langle s_1 \rangle}) = \mathcal{O}_{s_1 c_2}(W_{\langle s_1 \rangle})$, und nach Induktionsvoraussetzung ist $s_1 c_1 = s_1 c_2$. Es folgt $c_1 = c_2$ wie gewünscht. \square

SATZ 3.12: [9]

Sei (W, S) ein Coxeter-System. Die Menge alle Coxeter-Elemente von W ist in Bijektion mit der Menge aller Orientierungen von (W, S) .

Beweis. Offenbar ist jede Orientierung, die von einem Coxeter-Element kommt, azyklisch.

Sei nun umgekehrt \mathcal{O} eine Orientierung von (W, S) . Es bezeichne A_1 die Menge aller Quellen von \mathcal{O} . Für $k > 1$ bezeichne A_k die Menge aller Quellen des von $S \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ induzierten Teilgraphen von \mathcal{O} . Da jeder induzierte Teilgraph eines azyklischen Graphen wieder azyklisch ist, ist A_1, A_2, \dots eine Partition von S . Weiterhin kommutieren je zwei Coxeter-Erzeuger in A_i . Dann ist $c_{\mathcal{O}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i \geq 1} \prod_{s \in A_i} s$ ein Coxeter-Element, und es gilt $\mathcal{O}_{c_{\mathcal{O}}} = \mathcal{O}$.

Die Behauptung folgt dann mit Lemma 3.11. \square

BEISPIEL 3.13

Wir betrachten die durch den nachstehenden, azyklisch orientierten Coxeter-Graphen, gegebene Coxeter-Gruppe.

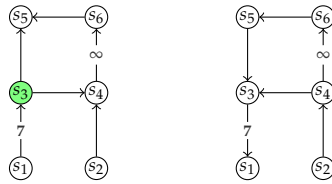


ABBILDUNG 6. Eine Mutation eines Coxeter-Graphen.

Dann ist

$$A_1 = \{s_1, s_2\}, \quad A_2 = \{s_3, s_5\}, \quad A_3 = \{s_4, s_7\}, \quad A_4 = \{s_6\},$$

und das entsprechende Coxeter-Element ist $c = s_1 s_2 s_3 s_5 s_4 s_7 s_6$.

DEFINITION 3.14

Sei (W, S) ein Coxeter-System, und $c \in W$ ein Coxeter-Element. Ein Coxeter-Erzeuger $s \in S$ heißt **INITIAL** (bzw. **FINAL**) in c , wenn s eine Quelle (bzw. Senke) in $\mathcal{O}_c(W)$ ist. Die **ROTATION** von c um eine initialen Coxeter-Erzeuger s ist das Coxeter-Element scs .

DEFINITION 3.15

Sei (W, S) ein Coxeter-System, und $c \in W$ ein Coxeter-Element. Die **MUTATION** von $\mathcal{O}_c(W)$ bei $s \in S$ ist die azyklische Orientierung von (W, S) , definiert durch das Vertauschen der Richtung aller mit s inzidenten Kanten.

Abbildung 6 zeigt eine Mutation eines Coxeter-Graphen.

Zur Erinnerung, für $s \in S$ ist $\langle s \rangle = S \setminus \{s\}$.

SATZ 3.16

In einer endlichen, irreduziblen Coxeter-Gruppe sind je zwei Coxeter-Elemente zueinander konjugiert.

Beweis. Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System und sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Sei $s \in S$ initial bzgl. c ; also s eine Quelle in $\mathcal{O}_c(W)$. Offenbar ist s final in scs , und damit eine Senke

| | | | | | | | | | | |
|-----|---------|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| W | A_n | B_n | D_n | E_6 | E_7 | E_8 | F_4 | H_3 | H_4 | $I_2(m)$ |
| h | $n + 1$ | $2n$ | $2n - 2$ | 12 | 18 | 30 | 12 | 10 | 30 | m |

TABELLE 3. Die Coxeter-Zahlen der endlichen irreduziblen Coxeter-Gruppen.

in $\mathcal{O}_{scs}(W)$. Also ist $\mathcal{O}_{scs}(W)$ die Mutation von $\mathcal{O}_c(W)$ bei s . Umgekehrt entspricht jede Mutation bei einem initialen Coxeter-Erzeuger s einer Rotation um s .

Da (W, S) endlich und irreduzibel ist, ist der zugehörige Coxeter-Graph ein Baum, und nach Bemerkung 3.10 ist jede Orientierung von (W, S) azyklisch. Wir zeigen mittels Induktion nach $\#S$, dass je zwei azyklische Orientierungen (W, S) durch eine Folge von Mutationen ineinander überführbar sind. Der Induktionsanfang $\#S = 1$ ist trivialerweise erfüllt. Nehmen wir also an, dass die Behauptung für alle Coxeter-Systeme von echt kleinerem Rang als $\#S$ wahr ist.

Seien \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 zwei azyklische Orientierungen von (W, S) , und sei s ein Blatt des Coxeter-Graphen von (W, S) . Sei s' der eindeutige Nachbar von s . Die von $\langle s \rangle$ induzierten Teilgraphen \mathcal{O}'_1 und \mathcal{O}'_2 sind wieder azyklisch und entsprechen nach Induktionsvoraussetzung azyklischen Orientierungen der parabolischen Untergruppe $W_{\langle s \rangle}$. Also gibt es eine Folge von Mutationen, die \mathcal{O}'_1 in \mathcal{O}'_2 überführt. Wir bezeichnen mit k die Anzahl der Mutationen bei s' . In Abhängigkeit von der Parität von k und der Orientierung der Kante zwischen s und s' in \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 müssen wir diese Folge von Mutationen ggf. um eine Mutation bei s erweitern, und erhalten so eine Folge von Mutationen die \mathcal{O}_1 in \mathcal{O}_2 überführt.

Da wir bereits gesehen haben, dass jede Mutation einer Rotation entspricht, entspricht eine Folge von Mutationen einer Konjugation von c . Die Behauptung folgt nun mit Satz 3.12. \square

BEMERKUNG 3.17: [3]

Für beliebige Coxeter-Systeme gilt, dass zwei Coxeter-Elemente genau dann konjugiert sind, wenn sie mittels einer Folge von Mutationen ineinander überführbar sind.

DEFINITION 3.18

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System, und sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Die Ordnung h von c ist die **COXETER-ZAHL** von (W, S) .

Nach Satz 3.16 sind alle Coxeter-Elemente einer endlichen Coxeter-Gruppe zueinander konjugiert, haben also die gleiche Ordnung. Dementsprechend ist die Coxeter-Zahl wohldefiniert. Tabelle 3 listet die Coxeter-Zahlen der endlichen, irreduziblen Coxeter-Gruppen auf.

BEMERKUNG 3.19

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System, und sei h dessen Coxeter-Zahl. Dann ist $h = \max \deg(W)$, und wenn $d \in \deg(W)$ ist, dann gilt das auch für $h + 2 - d$.

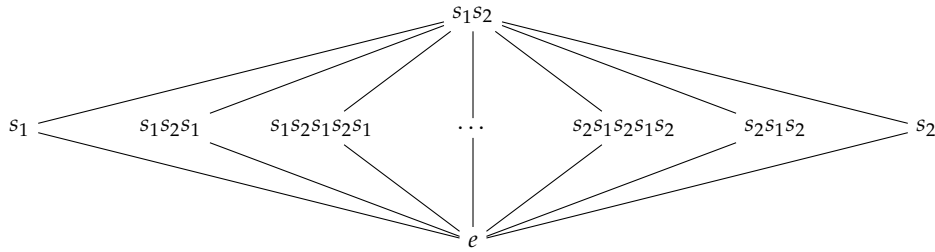


ABBILDUNG 7. Der Verband $\mathcal{NC}(I_2(m), s_1 s_2)$ mit $m < \infty$.

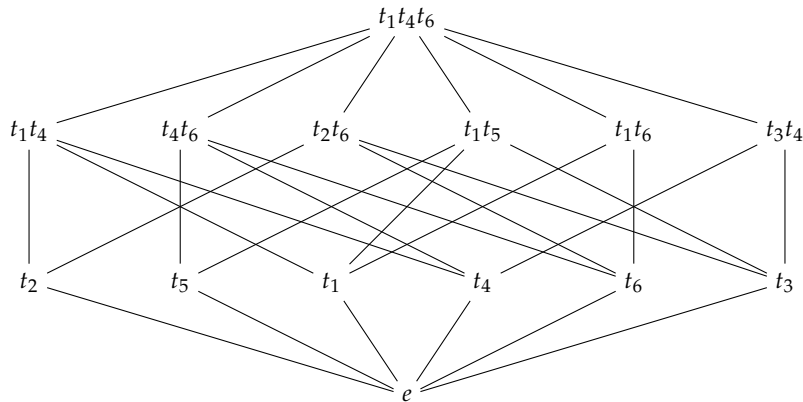


ABBILDUNG 8. Der Verband $\mathcal{NC}(A_3, s_1 s_2 s_3)$.

BEMERKUNG 3.20

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System, und sei h dessen Coxeter-Zahl. Sei weiter n der Rang von (W, S) und N die Anzahl der Spiegelungen von W . Dann gilt $h = 2N/n$.

3.3. Der Verband der Nichtkreuzenden Partitionen.

DEFINITION 3.21

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System, und sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Ein Element $w \in W$ mit $w \leq_T c$ heißt **c -NICHTKREUZENDE PARTITION** von W .

Wir bezeichnen die Menge aller c -nichtkreuzenden Partitionen von W mit $\mathcal{NC}(W, c)$ (es gilt also $\mathcal{NC}(W, c) = [e, c]_T$), und setzen $\mathcal{NC}(W, c) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{NC}(W, c), \leq_T)$. Abbildung 7 zeigt den Verband $\mathcal{NC}(I_2(m), s_1 s_2)$ für $m < \infty$ und Abbildung 8 zeigt den Verband $\mathcal{NC}(A_3, s_1 s_2 s_3)$.

KOROLLAR 3.22

Sei W endlich und irreduzibel, und seien $c, c' \in W$ zwei Coxeter-Elemente. Dann gilt $\mathcal{NC}(W, c) \cong \mathcal{NC}(W, c')$.

Beweis. Das folgt aus Proposition 3.4 und Satz 3.16. \square

BEISPIEL 3.23

Sei $W = I_2(m)$ mit $m < \infty$, und sei $c = s_1 s_2$. Für $k \in [m]$ seien $t = s_1 s_2 s_1 \cdots$ und $t' = s_1 s_2 s_1 \cdots$ Worte über S der Länge $2k + 1$ bzw. $2k - 1$. Dann ist offenbar $c = tt'$. Da sich jede Spiegelung in $I_2(m)$ als eines dieser Worte darstellen lässt (für $k \geq m/2$ sind diese Worte nicht mehr notwendigerweise reduziert), besteht $\mathcal{NC}(I_2(m))$ also aus $\text{Cat}(I_2(m)) = m + 2$ Elementen: der Identität, den m Spiegelungen und einem Coxeter-Element. Die geordnete Menge $\mathcal{NC}(I_2(m))$ hat also Rang 2, ein kleinstes und ein größtes Element, und ist demnach ein Verband.

3.3.1. *Nichtkreuzende Partitionen vom Typ A.* Für $W = A_n$ betrachten wir das folgende, namensgebende kombinatorische Modell.

DEFINITION 3.24

Für $n > 0$ ist eine **MENGENPARTITION** von $[n]$ ein Mengensystem $\mathbf{P} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ mit

- (i) $B_i \neq \emptyset$, und $B_i \subseteq [n]$ für $i \in [k]$;
- (ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i, j \in [k], i \neq j$;
- (iii) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k = [n]$.

Die Elemente von \mathbf{P} heißen **BLÖCKE**. Eine Mengensystem \mathbf{P} ist **NICHTKREUZEND**, falls es keine verschiedenen Blöcke $B, B' \in \mathbf{P}$ und keine Indizes $a < b < c < d$ gibt mit $a, c \in B$ und $b, d \in B'$.

Wir stellen eine Mengensystem \mathbf{P} graphisch wie folgt dar. Zunächst zeichnen wir n Knoten, die von links nach rechts mit $1, 2, \dots, n$ beschriftet werden auf eine horizontale Linie. Je zwei Knoten a, b , für die es einen Block $B \in \mathbf{P}$ gibt, sodass $a, b \in B$ es aber kein $c \in B$ mit $a < c < b$ gibt, werden mit einem Bogen verbunden, der oberhalb der Knoten verläuft. Dann ist eine Mengensystem genau dann nichtkreuzend, wenn das zugehörige Diagramm kreuzungsfrei gezeichnet werden kann. Abbildung 9 zeigt ein Beispiel.

Wir schreiben \mathcal{NC}_n für die Menge aller nichtkreuzenden Mengensystem auf $[n]$.

SATZ 3.25: [4, Corollaire 4.2]

Für $n \geq 0$ gilt $\#\mathcal{NC}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.



ABBILDUNG 9. Die Mengenpartition $\{\{1, 6, 7\}, \{2, 8, 14\}, \{3, 4, 5\}, \{9, 10, 12, 13\}, \{11\}\}$ im Diagramm.

Beweis. Wir schreiben kurz $c_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Offenbar gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot c_{n-k-1}$$

mit der Anfangsbedingung $c_0 = 1$. Wir zeigen induktiv, dass die Kardinalität $\#\text{NC}_n$ dieselbe Rekursion erfüllt. Die Anfangsbedingung $\#\text{NC}_0 = 1$ ist klar, da es nur die leere Mengenpartition auf \emptyset gibt, und diese offenbar nichtkreuzend ist.

Sei $\mathbf{P} \in \text{NC}_n$ und sei $B_\circ \in \mathbf{P}$ der eindeutige Block, der die 1 enthält. Es gibt zwei Fälle: entweder ist $\#B_\circ = 1$ oder nicht. Im ersten Fall ist $\mathbf{P} \setminus B_\circ$ eine nichtkreuzende Partition auf $\{2, 3, \dots, n\}$, und per Induktion gibt es c_{n-1} derartige Partitionen. Im zweiten Fall gibt es ein zweitkleinstes Element k in B_\circ , wobei $k \in \{2, 3, \dots, n\}$. Da \mathbf{P} nichtkreuzend ist, ist diese Partition eindeutig durch eine nichtkreuzende Mengenpartition auf $\{2, 3, \dots, k-1\}$ und eine nichtkreuzende Partition auf $\{k, k+1, \dots, n\}$ bestimmt. Also gibt es, für festes k , per Induktion $c_{k-2} \cdot c_{n-k+1}$ derartige Partitionen. Es folgt:

$$\#\text{NC}_n = c_{n-1} + \sum_{k=2}^n c_{k-2} c_{n-k+1} = c_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k c_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1} = c_n.$$

□

DEFINITION 3.26

Seien \mathbf{P} und \mathbf{P}' zwei Mengenpartitionen auf $[n]$. Die Partition \mathbf{P} **VERFEINERT** \mathbf{P}' , wenn für jeden Block $B \in \mathbf{P}$ ein Block $B' \in \mathbf{P}'$ existiert, sodass $B \subseteq B'$. In dem Fall schreiben wir $\mathbf{P} \leq_{\text{dref}} \mathbf{P}'$.

SATZ 3.27: [4, Théorème 2]

Für $n \geq 0$ ist die geordnete Menge $(\text{NC}_n, \leq_{\text{dref}})$ ein Verband.

Beweis. Offenbar hat $(\text{NC}_n, \leq_{\text{dref}})$ ein kleinstes Element $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ und ein größtes Element $\{\{1, 2, \dots, n\}\}$. Für $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \text{NC}_n$ ist außerdem $\mathbf{P} = \{B \cap B' \mid B \in \mathbf{P}_1, B' \in \mathbf{P}_2\} \setminus \{\emptyset\}$ eine nichtkreuzende Mengenpartition. Das ist zudem die größte nichtkreuzende Partition, die sowohl \mathbf{P}_1 als auch \mathbf{P}_2 verfeinert; und muss damit das Infimum von \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 sein. Also ist $(\text{NC}_n, \leq_{\text{dref}})$ eine endliche geordnete Menge, die ein größtes Element besitzt, und unter Infima abgeschlossen ist. Daraus folgt aber schon, dass $(\text{NC}_n, \leq_{\text{dref}})$ ein Verband ist. □

Abschließend beweisen wir, dass die Mengen NC_{n+1} und $\text{NC}(A_n, s_1 s_2 \cdots s_n)$ in Bijektion sind.

DEFINITION 3.28

Sei $n \geq 0$. Eine Permutation $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ ist **AUFSTIEGEND**, wenn für alle $1 \leq i < j < k \leq n+1$ gilt: $(i j k) \leq_T w$.

Mit anderen Worten, w ist genau dann aufsteigend, wenn man jeden Zyklus von w derart anordnen kann, dass die Einträge in aufsteigender Reihenfolge erscheinen.

DEFINITION 3.29

Sei $n \geq 0$. Eine Permutation $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ ist **KREUZEND**, wenn es $1 \leq i < j < k < l \leq n+1$ gibt, derart dass $(i k) \leq_T w$ und $(j l) \leq_T w$, aber $(i j k l) \not\leq_T w$. Eine Permutation ist **NICHTKREUZEND**, wenn sie nicht kreuzend ist.

LEMMA 3.30

Für $n \geq 0$ ist die Menge aller aufsteigenden, nichtkreuzenden Permutationen in \mathfrak{S}_{n+1} in Bijektion mit NC_{n+1} .

Beweis. Die gesuchte Bijektion ist die Abbildung, die Blöcke in Zyklen umwandelt. \square

PROPOSITION 3.31

Sei $W = A_n$, sei $c = s_1 s_2 \cdots s_n$, und sei $w \in A_n$. Es ist $w \in \text{NC}(A_n, c)$ genau dann, wenn w eine aufsteigende, nichtkreuzende Permutation ist.

Beweis. Offenbar ist $c = (1 2 \dots n+1)$ selbst eine aufsteigende, nichtkreuzende Permutation, und für alle $w \in A_n$ gilt $\ell_T(w) \leq n$.

Sei $w \in \text{NC}(A_n, c)$. Wenn w nicht aufsteigend ist, dann gibt es Indizes $i < j < k$ derart, dass $(i k j) \leq_T w \leq_T c$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} (i k j)^{-1} \cdot c &= (i j k) \cdot c \\ &= (i j)(j k) \cdot c \\ &= (i j) \cdot (1 \dots i \dots j-1 k \dots n+1)(j \dots k-1) \\ &= (1 \dots i-1 j \dots k-1 i \dots j-1 k \dots n+1). \end{aligned}$$

Also ist $\ell_T((i k j)^{-1} c) = n = \ell_T(c)$ im Widerspruch zu $(i k j) \leq_T c$.

Nehmen wir nun weiter an, dass es Indizes $1 \leq i < j < k < l \leq n+1$ gibt, sodass $(i k) \leq_T w$ und $(j l) \leq_T w$. Das bedeutet, dass w Zyklen ζ_1 und ζ_2 besitzt, sodass $i, k \in \zeta_1$ und $j, l \in \zeta_2$. Wenn

$\zeta_1 = \zeta_2$, dann gibt es also einen Zyklus in w , der i, j, k, l enthält. Da w aufsteigend ist, folgt direkt $(i j k l) \leq_T w$, also ist w nichtkreuzend. Wenn $\zeta_1 \neq \zeta_2$, dann ist $(i k)(j l) \leq_T w \leq_T c$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} (i k)(j l) \cdot c &= (i k) \cdot (1 \dots i \dots j-1 l \dots n+1)(j \dots k \dots l-1) \\ &= (1 \dots i-1 k \dots l-1 \dots j \dots k-1 i \dots j-1 l \dots n+1). \end{aligned}$$

Also ist $\ell_T((i k)(j l)c) = n = \ell_T(c)$ im Widerspruch zu $(i k)(j l) \leq_T c$.

Sei nun umgekehrt $w \in A_n$ aufsteigend und nichtkreuzend mit $\ell_T(w) = k$. Wir zeigen mit Induktion nach $n - k$, dass $w \in \text{NC}(A_n, c)$ ist. Der Induktionsanfang $n - k = 0$ ist erfüllt, da c der einzige aufsteigende $(n + 1)$ -Zyklus ist, und c ist trivialerweise nichtkreuzend. Sei also $w \in A_n$ aufsteigend und nichtkreuzend derart, dass $n - k > 0$ ist. Sei $\zeta_1 = (a_1 < a_2 < \dots < a_r)$ der eindeutige Zyklus mit $a_1 = 1$. Da $w \neq c$ ist $r < n + 1$. Sei i der minimale Index in $[r - 1]$ mit $a_i + 1 < a_{i+1}$, falls dieser existiert, oder $i = r$. Es gibt einen Zyklus $\zeta_2 = (b_1 < b_2 < \dots < b_s)$ mit $b_1 = a_i + 1$. Da w nichtkreuzend ist ist $b_s < a_{i+1}$, falls $i < r$. Sei $w' = w \cdot (a_i b_s)$. Dann besitzt w' alle Zyklen von w , außer, dass ζ_1 und ζ_2 zu dem aufsteigenden Zyklus $\zeta = (a_1 < a_2 < \dots < a_i < b_1 < b_2 < \dots < b_s < a_{i+1} < \dots < a_r)$ zusammengefügt werden. Da w nichtkreuzend ist, ist auch w' nichtkreuzend, und da $\ell_T(w') = \ell_T(w) + 1$ folgt nach Induktionsvoraussetzung $w \leq_T w' \leq_T c$. \square

PROPOSITION 3.32

Seien $u, u' \in \text{NC}(A_n, s_1 s_2 \dots s_n)$, und seien $\mathbf{P}, \mathbf{P}' \in \text{NC}_{n+1}$ die zugehörigen nichtkreuzenden Mengensegmentpartitionen. Dann gilt genau dann $u \leq_T u'$, wenn $\mathbf{P} \leq_{\text{dref}} \mathbf{P}'$ gilt.

Beweis. Wenn $u \leq_T u'$ gilt, dann gibt es nach Definition ein $t = (i j)$, sodass $u' = ut$ ist. Das ist äquivalent dazu, dass in u die Elemente i und j in zwei verschiedenen Zyklen liegen, und in u' in einem gemeinsamen Zyklus; alle übrigen Zyklen von u und u' stimmen überein. Das ist aber genau dann der Fall, wenn i und j in verschiedenen Blöcken von \mathbf{P} liegen, und in einem gemeinsamen Block von \mathbf{P}' ; alle übrigen Blöcke von \mathbf{P} und \mathbf{P}' stimmen überein. Das ist wiederum äquivalent dazu, dass $\mathbf{P} \leq_{\text{dref}} \mathbf{P}'$ gilt. \square

3.3.2. Nichtkreuzende Partitionen allgemein.

SATZ 3.33

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System, und sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Dann ist $\#\text{NC}(W, c) = \text{Cat}(W)$.

Beweis. Mit Korollar 3.22 genügt es die Behauptung für ein bestimmtes Coxeter-Element c zu zeigen.

Wir haben in Beispiel 3.23 gesehen, dass $\#\text{NC}(I_2(m), c) = m + 2 = \text{Cat}(I_2(m))$, falls $m < \infty$. Satz 3.25, sowie Lemma 3.30 und Proposition 3.31 ergeben zusammen

$$\#\text{NC}(A_n, s_1 s_2 \cdots s_n) = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} = \text{Cat}(A_n).$$

Für die Ausnahmegruppen $E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$ lässt sich die Aussage explizit nachprüfen. Für die unendlichen Familien B_n und D_n lassen sich geeignete Modelle nichtkreuzender Mengenpartitionen finden, sodass ein Nachweis der gewünschten Eigenschaft analog zu A_n erfolgen kann. \square

SATZ 3.34

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System, und sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Die geordnete Menge $\mathcal{NC}(W, c)$ ist ein Verband.

Beweis. Mit Korollar 3.22 genügt es die Behauptung für ein bestimmtes Coxeter-Element c zu zeigen.

Wir haben in Beispiel 3.23 gesehen, dass $\mathcal{NC}(I_2(m), c)$ im Fall $m < \infty$ einen Verband bildet. Satz 3.27, sowie Lemma 3.30 und Propositionen 3.31 und 3.32 ergeben, dass auch $\mathcal{NC}(A_n, s_1 s_2 \cdots s_n)$ einen Verband bildet.

Für die Ausnahmegruppen $E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$ lässt sich die Aussage explizit nachprüfen. Für die unendlichen Familien B_n und D_n lassen sich geeignete Modelle nichtkreuzender Mengenpartitionen finden, sodass ein Nachweis der gewünschten Eigenschaft analog zu A_n erfolgen kann. \square

Wir wollen nun noch ein paar Eigenschaften nichtkreuzender Partitionen herausarbeiten.

DEFINITION 3.35

Für $w \in \text{NC}(W, c)$ setzen wir $\text{Ref}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T \mid t \leq_T w\}$. Dann ist $W(w) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \text{Ref}(w) \rangle$ die **VON w ERZEUGTE PARABOLISCHE UNTERGRUPPE** von W .

LEMMA 3.36

Die in einem T -reduzierten Wort für $w \in W$ auftretenden Spiegelungen sind paarweise verschieden.

Beweis. Sei $w = t_1 t_2 \dots t_k$ mit $k = \ell_T(w)$. Für ein festes $i \in [k]$ setzen wir für alle $j \in [k]$:

$$t'_j = \begin{cases} t_j, & \text{wenn } j \notin \{i, i-1\}, \\ t_i, & \text{wenn } j = i-1, \\ t_i t_{i-1} t_i, & \text{wenn } j = i. \end{cases}$$

Dann ist offenbar $t'_j \in T$ und $w = t'_1 t'_2 \cdots t'_k$. Insbesondere ist das also wieder ein T -reduziertes Wort für w , und in diesem steht der Buchstabe t_i an der Stelle $i - 1$. Wir nennen die Transformation $t_1 t_2 \cdots t_k \rightarrow t'_1 t'_2 \cdots t'_k$ eine **HURWITZ-TRANSFORMATION**.

Wenn es also $a, b \in [k]$ gibt mit $t_a = t = t_b$ und $a \neq b$, dann können wir mit Hilfe solcher Transformationen ein T -reduziertes Wort für w finden, in dem der Buchstabe t an zwei benachbarten Stellen auftritt, was $\ell_T(w) = k$ widerspricht. \square

PROPOSITION 3.37

Sei $c \in W$ ein Coxeter-Element, und seien $u, v \in \text{NC}(W, c)$. Es gilt $u \leq_T v$ genau dann, wenn $W(u) \subseteq W(v)$ gilt.

Beweis. Wenn $u \leq_T v$ ist, dann ist offenbar $\text{Ref}(u) \subseteq \text{Ref}(v)$, und damit $W(u) \subseteq W(v)$.

Sei umgekehrt $W(u) \subseteq W(v)$. Dann ist jede Spiegelung $t \leq_T u$ in $W(u)$, und damit auch in $W(v)$ enthalten. Also ist $\text{Ref}(u) \subseteq \text{Ref}(v)$. Damit ist aber u eine obere Schranke von $\text{Ref}(u)$. Es ist u aber auch eine minimale obere Schranke von $\text{Ref}(u)$. Denn, für $u' <_T u$, gibt es nach Definition ein $t \in T$ mit $u = u't$.

Das bedeutet aber, dass es ein T -reduziertes Wort für u gibt, das auf t endet, und mit der Hurwitz-Transformation aus dem Beweis von Lemma 3.36 folgt, dass es ein T -reduziertes Wort für u gibt, das mit t beginnt. Nach Definition ist $t \leq_T u$, also $t \in \text{Ref}(u)$. Mit Lemma 3.36 folgt aber $t \not\leq_T u'$, also $t \notin \text{Ref}(u')$. Insbesondere ist u' keine obere Schranke von $\text{Ref}(u)$. Mit Satz 3.34 folgt $u = \bigvee \text{Ref}(u)$. Da $\text{Ref}(u) \subseteq \text{Ref}(v)$ ist, folgt $u = \bigvee \text{Ref}(u) \leq_T \bigvee \text{Ref}(v) = v$. \square

PROPOSITION 3.38

Sei $w \leq_T c$ und sei $s \in S$ initial in c . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $w \in W_{\langle s \rangle}$;
- (ii) $\text{Ref}(w) \subseteq W_{\langle s \rangle}$;
- (iii) $w \leq_T sc$;
- (iv) $w \leq_T sw \leq_T c$.

Beweis. “(i) \iff (ii)”: Sei $w \in W_{\langle s \rangle}$. Dann wird w offenbar von Spiegelungen in $W_{\langle s \rangle}$ erzeugt, und es folgt direkt $\text{Ref}(w) \subseteq W_{\langle s \rangle}$. Sei umgekehrt $\text{Ref}(w) \subseteq W_{\langle s \rangle}$. Dann besteht jedes T -reduzierte Wort für w aus Spiegelungen von $W_{\langle s \rangle}$, und somit besteht auch jedes reduzierte Wort für w aus einfachen Spiegelungen von $W_{\langle s \rangle}$, und es folgt $w \in W_{\langle s \rangle}$.

“(i) \iff (iii)”: Wenn s initial in c ist, dann gilt offenbar $sc \leq_T c$. Mit Proposition 3.37 ist $w \leq_T sc$ genau dann, wenn $W(w) \subseteq W(sc) = W_{\langle s \rangle}$.

“(iv) \implies (iii)”: Da s initial ist, und $w \leq_T sw \leq_T c$ gilt, gibt es ein T -reduziertes Wort $st_1t_2 \cdots t_{n-1}$ für c , sodass $w = t_1t_2 \cdots t_k$ für ein $k \leq n - 1$. Also ist $w \leq_T sc$.

“(iii) \implies (iv)”: Wir haben bereits gezeigt, dass (ii) und (iii) äquivalent sind. Wenn also $w \leq_T sc$ gilt, dann folgt einerseits direkt $sw \leq_T c$, und andererseits ist $\text{Ref}(w) \subseteq W_{\langle s \rangle}$. Also ist für jedes T -reduzierte Wort $t_1t_2 \cdots t_k$ für w auch $st_1t_2 \cdots t_k$ ein T -reduziertes Wort. Damit folgt bereits $w \leq_T sw$. \square

4. COXETER-SORTIERBARE ELEMENTE

4.1. **Eigenschaften Coxeter-Sortierbarer Elemente.** In Satz 3.12 haben wir gesehen, dass jedes Coxeter-Element eine Orientierung von (W, S) induziert. Wir nutzen diesen Zusammenhang um eine kanonische Darstellung für die Elemente von W in Abhängigkeit des gewählten Coxeter-Elements zu definieren.

Sei dazu $c = s_1 s_2 \cdots s_n$ ein Coxeter-Element von W , und sei

$$c^\infty \stackrel{\text{def}}{=} s_1 s_2 \cdots s_n | s_1 s_2 \cdots s_n | s_1 \cdots .$$

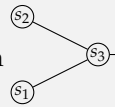
Die senkrechten Trenner in dieser Darstellung haben keinen Einfluss auf die Produktstruktur, sondern dienen nur der besseren Visualisierung. Für $w \in W$ kommt offensichtlich jedes reduzierte Wort von w als Unterwort von c^∞ vor. Nach Lemma 3.8 unterscheiden sich c^∞ basierend auf zwei verschiedenen reduzierten Worten für c nur durch Kommuntationen, und keine derartige Kommuntation geht über die Trenner hinweg.

DEFINITION 4.1

Sei (W, S) ein Coxeter-System, und $c \in W$ ein Coxeter-Element. Das **c -SORTIERWORT** für $w \in W$ ist das reduzierte Wort für w , das als lexikographisch kleinstes Unterwort von c^∞ auftaucht.

Wir bezeichnen das c -Sortierwort von w üblicherweise mit $\mathbf{w}(c)$. Der i -te **BLOCK** von w bzgl. c besteht aus der Menge der Buchstaben zwischen dem $(i - 1)$ -ten und i -ten Trenner in $\mathbf{w}(c)$. Da w endliche Länge hat, sind fast alle Blöcke leer.

BEISPIEL 4.2



Sei (W, S) gegeben durch den Coxeter-Graphen s_2 s_1 s_3 s_4 s_5 . Das durch das Wort

$w = s_5 s_3 s_1 s_3$ gegebene Element besitzt acht reduzierte Worte:

$$s_5 | s_3 | s_1 s_3 \quad s_3 s_5 | s_1 s_3 \quad s_3 | s_1 s_5 | s_3 \quad s_3 | s_1 s_3 s_5 \quad s_1 s_3 | s_1 s_5 \quad s_1 s_3 s_5 | s_1 \quad s_1 s_5 | s_3 | s_1 \quad s_5 | s_1 s_3 | s_1 .$$

Für $c = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5$ ist $\mathbf{w}(c) = s_1 s_3 s_5 | s_1$.

DEFINITION 4.3: [8, Section 2.7]

Sei (W, S) ein Coxeter-System, und $c \in W$ ein Coxeter-Element. Ein Element $w \in W$ ist **c -SORTIERBAR**, falls für alle $i > 1$ gilt, dass der i -te Block im $(i - 1)$ -ten Block enthalten ist.

Wir schreiben $\text{Sort}(W, c)$ für die Menge aller c -sortierbaren Elemente von W . Das nächste Lemma folgt sofort aus der Definition.

LEMMA 4.4

Das neutrale Element e ist c -sortierbar für alle $c \in W$.

BEISPIEL 4.5

Sei $W = I_2(m)$ mit $m < \infty$. Es gibt nur zwei Coxeter-Elemente, nämlich $c_1 = s_1s_2$ und $c_2 = s_2s_1$. Da sich alle Elemente von $I_2(m)$ in der Form $s_1s_2 \cdots$ bzw. $s_2s_1 \cdots$ schreiben lassen, ist ein Element $w \in I_2(m)$ genau dann c_1 -sortierbar, wenn $w = e$, $w = s_2$, oder w ein reduziertes Wort besitzt, das mit s_1 beginnt. Das sind gerade $m + 2$ Elemente.

BEISPIEL 4.6

Sei $W = A_3$, und sei $c = s_1s_3s_2$. Nachfolgend sind die c -Sortierworte der Elemente von A_3 aufgelistet, und die vierzehn c -sortierbaren Elemente sind hervorgehoben:

| | | | | | |
|--|--|---|--|---|---|
| e, | s₁, | s₂, | s₃, | s₁s₂, | s₁s₃, |
| s ₂ s ₁ , | s ₂ s ₃ , | s₃s₂, | s₁s₂ s₁, | s ₁ s ₂ s ₃ , | s₁s₃s₂, |
| s ₂ s ₁ s ₃ , | s ₃ s ₂ s ₁ , | s₃s₂ s₃, | s ₁ s ₂ s ₁ s ₃ , | s₁s₃s₂ s₁, | s₁s₃s₂ s₃, |
| s ₂ s ₁ s ₃ s ₂ , | s ₃ s ₂ s ₁ s ₃ , | s ₁ s ₂ s ₁ s ₃ s ₂ , | s₁s₃s₂ s₁s₃, | s ₃ s ₂ s ₁ s ₃ s ₂ , | s₁s₃s₂ s₁s₃s₂. |

Zur Erinnerung, für $J \subseteq S$ ist W_J die von J erzeugte (parabolische) Untergruppe von W , und für $s \in S$ schreiben wir $\langle s \rangle$ anstelle von $S \setminus \{s\}$.

PROPOSITION 4.7: [5, Lemmas 2.4 und 2.5]

Sei $c \in W$ ein Coxeter-Element, sei $s \in S$ initial in c und sei $w \in W$.

- (i) Falls $\ell_S(sw) > \ell_S(w)$, dann ist w genau dann c -sortierbar, wenn w in $W_{\langle s \rangle}$ sc -sortierbar ist.
- (ii) Falls $\ell_S(sw) < \ell_S(w)$, dann ist w genau dann c -sortierbar, wenn sw in W scs -sortierbar ist.

Beweis. (i) Falls $\ell_S(sw) > \ell_S(w)$, dann ist nach Definition $s \notin \text{Inv}(w)$, und nach Proposition 2.12 ist $s \not\leq_S w$. Korollar 2.11(ii) impliziert dann, dass es kein reduziertes Wort für w gibt, das mit s beginnt. Wenn es ein reduziertes Wort für w gibt, das s enthält, dann trifft das auch für das c -Sortiertwort von w zu, und es ist $w \notin W_{\langle s \rangle}$, sowie $w \notin \text{Sort}(W, c)$. Wenn s in keinem reduzierten Wort für w auftaucht, dann ist $w \in W_{\langle s \rangle}$. Da sc ein Coxeter-Element von $W_{\langle s \rangle}$ ist, folgt die Behauptung.

(ii) Falls $\ell_S(sw) < \ell_S(w)$, dann gibt es ein reduziertes Wort für w , das s enthält. Da s initial in c ist, kann w überhaupt nur c -sortierbar sein, wenn $\mathbf{w}(c)$ mit s beginnt. Die Rotation von c um s "verschiebt" die Trenner eine Stelle nach rechts, und die Behauptung folgt. \square

Proposition 4.7 ist ein mächtiges Werkzeug in der Theorie der Coxeter-sortierbaren Elemente, da es eine Doppelinduktion ermöglicht: es wird parallel über den Rang der Coxeter-Gruppe und die Länge des betrachteten Wortes induziert. Proposition 4.7 garantiert, dass diese beiden Induktionen sich nicht miteinander interferieren. Der Induktionsanfang ist in beiden Fällen durch Lemma 4.4 gegeben.

4.1.1. *Coxeter-Sortierbare Elemente vom Typ A.* Sei nun $W = A_n$, und $c \in W$ ein Coxeter-Element. Da $\ell_T(c) = n$, folgt aus Beispiel 3.1, dass c ein n -Zyklus ist. Also können wir c in der Form $c = (1 d_1 d_2 \dots d_l n+1 u_k u_{k-1} \dots u_1)$ schreiben. In der Zeilennotation von $w \in A_n$ unterstreichen wir die Elemente d_i und überstreichen die Elemente u_i .

DEFINITION 4.8

Sei $c \in A_n$ ein Coxeter-Element, und sei $w \in A_n$ entsprechend c dekoriert. Dann besitzt w ein **312-MUSTER**, wenn es Indizes $1 \leq i < j < k \leq n+1$ mit $w(j) < w(k) < w(i)$ gibt, und $w(k)$ unterstrichen ist. Analog besitzt w ein **231-MUSTER**, wenn es Indizes $1 \leq i < j < k \leq n+1$ mit $w(k) < w(i) < w(j)$ gibt, und $w(i)$ überstrichen ist.

BEISPIEL 4.9

Sei $W = A_5$ und sei $c = s_4 s_2 s_1 s_3 s_5 = (1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 2)$. Also werden die Zahlen 3 und 5 unterstrichen, und 2 und 4 überstrichen. Die Permutation $w = [\bar{4}, \underline{5}, \bar{6}, \bar{2}, \underline{1}, \underline{3}]$ besitzt ein $\bar{2}31$ -Muster in den Positionen (1, 2, 4), und ein $31\underline{2}$ -Muster in den Positionen (1, 4, 6). Die Positionen (2, 3, 4) bilden kein $\bar{2}31$ -Muster, da 5 nicht überstrichen ist.

PROPOSITION 4.10

Sei $n > 0$ und $\tilde{c} \stackrel{\text{def}}{=} s_n s_{n-1} \dots s_1 = (1 \ n+1 \ n \ \dots \ 2)$. Dann ist $w \in \text{Sort}(A_n, \tilde{c})$ genau dann, wenn w kein $\bar{2}31$ -Muster besitzt.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass jede Zahl in $\{2, 3, \dots, n\}$ überstrichen ist.

Sei $A_n(\bar{2}31)$ die Menge aller Permutationen in A_n , die kein $\bar{2}31$ -Muster besitzen. Offenbar ist $s = s_n = (n+1 \ n)$ der einzige initiale Erzeuger von \tilde{c} . Dann ist $\ell_S(sw) > \ell_S(w)$ genau dann, wenn n in der Zeilennotation von w vor $n+1$ steht. Offenbar ist $A_{n-1} = (A_n)_{(s)}$, und es gilt $w \in A_{n-1}$ genau dann, wenn $n+1$ ein Fixpunkt von w ist.

Sei nun $w \in A_n$.

(i) Wenn $\ell_S(sw) > \ell_S(w)$, dann steht n in der Zeilennotation von w vor $n+1$. Wenn $n+1$ ein Fixpunkt von w ist, dann ist $w \in A_{n-1}$ und jedes $\bar{2}31$ -Muster von w kann nur in den Positionen $1, 2, \dots, n$ auftreten. Wenn $n+1$ kein Fixpunkt ist, dann ist $w(j) = n+1$ für ein $j < n+1$. Nach Annahme gibt es $i < j$ mit $w(i) = n$ und es ist $w(n+1) < n$. Da alle Zahlen in $\{2, 3, \dots, n\}$ überstrichen sind, ist $(i, j, n+1)$ ein $\bar{2}31$ -Muster von w , und $w \notin W_{(s)}$.

(ii) Wenn $\ell_S(sw) < \ell_S(w)$, dann steht n in der Zeilennotation von w nach $n+1$. Seien also $i < j$ derart, dass $w(i) = n+1$ und $w(j) = n$. Insbesondere besitzt w weder ein $\bar{2}31$ -Muster der Form (i, a, b) , noch eines der Form (j, a, b) für beliebige Indizes a, b . Wenn wir $w' = sw$ setzen, gilt also $w'(i) = n$ und $w'(j) = n+1$, und die Dekoration bzgl. $s\tilde{c}s$ entspricht der Dekoration bzgl. \tilde{c} , außer dass n nun unterstrichen ist. Offenbar kann w' kein $\bar{2}31$ -Muster der Form (i, a, b) besitzen, da n nicht überstrichen ist, und ebenfalls kein $\bar{2}31$ -Muster der Form (j, a, b) . Also besitzt w genau dann ein $\bar{2}31$ -Muster, wenn sw ein $\bar{2}31$ -Muster besitzt. Der Vollständigkeit halber, merken wir noch an, dass w' kein $31\bar{2}$ -Muster der Form (a, b, i) besitzen kann, da $n+1$ nach n in w' steht.

Also erfüllen die Elemente von $A_n(\bar{2}31)$ die Rekursion in Proposition 4.7, und müssen daher genau die \tilde{c} -sortierbaren Elemente von A_n sein. \square

BEMERKUNG 4.11

Allgemein kann man zeigen, dass $w \in \text{Sort}(A_n, c)$ genau dann liegt, wenn w kein $\bar{2}31$ - und kein $31\bar{2}$ -Muster bzgl. der Dekoration durch c besitzt.

BEMERKUNG 4.12

Für $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ führen wir den folgenden Algorithmus aus. Für $i \in [n+1]$ legen wir $w(i)$ auf den Stapel, wenn dieser leer ist oder wenn das oberste Element des Stapels größer als $w(i)$ ist. Wenn das oberste Element des Stapels kleiner als $w(i)$ ist, entfernen wir solange Elemente vom Stapel und schreiben sie der Reihe nach in eine Ergebnisliste, bis dieser entweder leer ist oder wir ein Element finden, das größer als $w(i)$ ist. Dann legen wir $w(i)$ auf den Stapel. Wenn wir $w(n+1)$ auf den Stapel gelegt haben, entfernen wir die Elemente des Stapels bis dieser leer ist, und schreiben sie der Reihe nach in eine Ergebnisliste.

Wenn die Ergebnisliste für w in aufsteigender Reihenfolge sortiert ist, nennen wir w **STAPEL-SORTIERBAR**. Nun kann man zeigen, dass $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ genau dann stapel-sortierbar ist, wenn w kein 231 -Muster besitzt. Da im Fall $\tilde{c} = s_n s_{n-1} \cdots s_1$ alle Werte in $\{2, 3, \dots, n\}$ überstrichen sind, können wir diese Dekoration also vernachlässigen. Proposition 4.10 zeigt also, dass die \tilde{c} -sortierbaren Elemente von A_n genau die stapel-sortierbaren Permutationen in \mathfrak{S}_{n+1} sind.

BEISPIEL 4.13

Die folgende Tabelle beschreibt die Stapelsortierung von $w = [4, 1, 3, 7, 5, 2, 8, 6]$. (Das oberste Element des Stapels steht am weitesten rechts.)

| i | Permutation | Stapel | Ausgabe |
|-----|----------------------------|----------|-------------|
| 0 | $[4, 1, 3, 7, 5, 2, 8, 6]$ | $[\]$ | $[\]$ |
| 1 | $[1, 3, 7, 5, 2, 8, 6]$ | $[4, 1]$ | $[\]$ |
| 2 | $[3, 7, 5, 2, 8, 6]$ | $[4, 3]$ | $[1]$ |
| 3 | $[7, 5, 2, 8, 6]$ | $[7]$ | $[1, 3, 4]$ |
| 4 | $[5, 2, 8, 6]$ | $[7, 5]$ | $[1, 3, 4]$ |

| | | | |
|---|-----------|-----------|--------------------------|
| 5 | [2, 8, 6] | [7, 5, 2] | [1, 3, 4] |
| 6 | [8, 6] | [8] | [1, 3, 4, 2, 5, 7] |
| 7 | [6] | [8, 6] | [1, 3, 4, 2, 5, 7] |
| 8 | [] | [] | [1, 3, 4, 2, 5, 7, 6, 8] |

Das Ergebnis ist nicht aufsteigend sortiert, und w besitzt ein 231-Muster, bspw. bei $(1, 4, 6)$. Wenn wir $w' = (4\ 6)w = [4, 1, 3, 2, 5, 7, 8, 6]$ betrachten, erhalten wir eine sortierte Ausgabe, und w' besitzt in der Tat kein 231-Muster.

4.2. Bijektion zu c -Nichtkreuzenden Partitionen.

DEFINITION 4.14

Sei (W, S) ein Coxeter-System, und sei $w \in W$. Eine Spiegelung $t \in \text{Inv}(w)$ heißt **BEDECKUNGSSPIEGELUNG**, falls es ein $s \in S$ gibt, sodass $ws = tw$.

Wir schreiben $\text{Cov}(w)$ für die Menge aller Bedeckungsspiegelungen von w . Für den Rest dieses Abschnittes sei (W, S) nun ein endliches, irreduzibles Coxeter-System. Für ein Coxeter-Element $c \in W$ induziert das c -Sortierwort $\mathbf{w}_o(c)$ von w_o eine lineare Ordnung auf T vermöge Definition 1.18, nämlich

$$\hat{T}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{T}(\mathbf{w}_o(c)).$$

Wir schreiben nun $\widehat{\text{Cov}}_c(w)$ für die Einschränkung von $\hat{T}(c)$ auf die Menge der Bedeckungsspiegelung von w . Insbesondere, falls $\widehat{\text{Cov}}_c(w) = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ist, dann setzen wir

$$\text{nc}_c(w) \stackrel{\text{def}}{=} t_1 t_2 \cdots t_k.$$

Diese Zuordnung kann nun zu einer Abbildung

$$(3) \quad \text{nc}_c: W \rightarrow W, \quad w \mapsto \text{nc}_c(w)$$

fortgesetzt werden.

BEISPIEL 4.15

Sei $W = B_2$. Wenn $c = s_1 s_2$, dann ist $\mathbf{w}_o(c) = s_1 s_2 s_1 s_2$, und damit ist $\hat{T}(c) = (s_1, s_1 s_2 s_1, s_2 s_1 s_1, s_2)$. Wir erhalten die folgende Tabelle.

| | | | | | | | | |
|-----------------------------|------|---------|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| w | e | s_1 | s_2 | $s_1 s_2$ | $s_2 s_1$ | $s_1 s_2 s_1$ | $s_2 s_1 s_2$ | $s_1 s_2 s_1 s_2$ |
| $\widehat{\text{Cov}}_c(w)$ | $()$ | (s_1) | (s_2) | $(s_1 s_2 s_1)$ | $(s_2 s_1 s_2)$ | $(s_2 s_1 s_2)$ | $(s_1 s_2 s_1)$ | (s_1, s_2) |
| $\text{nc}_c(w)$ | e | s_1 | s_2 | $s_1 s_2 s_1$ | $s_2 s_1 s_2$ | $s_2 s_1 s_2$ | $s_1 s_2 s_1$ | c |

Offenbar ist diese Abbildung nicht injektiv.

LEMMA 4.16

Wenn $w \in \text{Sort}(W, c)$, dann ist $\text{nc}_c(w) \in \text{NC}(W, c)$.

Beweis. Sei $c = s_1 s_2 \cdots s_n$, und sei $s = s_1$, und sei $w \in \text{Sort}(W, c)$ mit $\widehat{\text{Cov}}_c = (t_1, t_2, \dots, t_k)$.

Wenn $\ell_S(sw) > \ell_S(w)$, dann folgt aus Proposition 4.7(i), dass $w \in \text{Sort}(W_{\langle s \rangle}, sc)$. Insbesondere ist auch $\widehat{\text{Cov}}_c(w) = \widehat{\text{Cov}}_{sc}(w)$, und mit Induktion nach dem Rang von W folgt $\text{nc}_c(w) = \text{nc}_{sc}(w) \leq_T sc \leq_T c$.

Wenn $\ell_S(sw) < \ell_S(w)$, dann gibt es zwei Fälle: entweder $s \in \text{Cov}(w)$ oder $s \notin \text{Cov}(w)$. Sei zunächst $s \notin \text{Cov}(w)$. Für $i \in [k]$ gilt $t_i w = ws'$ für ein $s' \in S$, was äquivalent zu $(st_i s)sw = sws'$ ist. Insbesondere ist $\text{Cov}(sw) = \{st_i s \mid i \in [k]\}$. Mit Induktion nach Länge ist $\text{nc}_{scs}(sw) = (st_1 s)(st_2 s) \cdots (st_k s) \leq_T scs$, und mit Proposition 3.4 folgt $\text{nc}_c(w) = t_1 t_2 \cdots t_k \leq_T c$.

Sei abschließend $s \in \text{Cov}(w)$. Dann ist notwendigerweise $s = t_1$, und $\text{Cov}(sw) = \text{Cov}(w) \setminus \{s\}$. Damit ist aber $\text{nc}_{scs}(sw) = (st_2 s) \cdots (st_k s) \leq_T scs$ mit Induktion nach Länge, und es folgt $t_2 \cdots t_k = x \leq_T c$. Jetzt kann man sich überlegen, dass $t_i \in W_{\langle s \rangle}$ für $i > 1$, und damit auch $x \in W_{\langle s \rangle}$. Mit Proposition 3.38 folgt $w = sx \leq_T c$. \square

KOROLLAR 4.17

Sei s initial in c und sei $w \in \text{Sort}(W, c)$ mit $\ell_S(sw) < \ell_S(w)$.

- Wenn $s \in \text{Cov}(w)$, dann ist $\text{nc}_{scs}(sw) = \text{nc}_c(w) \cdot s$.
- Wenn $s \notin \text{Cov}(w)$, dann ist $\text{nc}_{scs}(sw) = s \cdot \text{nc}_c(w) \cdot s$.

SATZ 4.18

Sei (W, S) ein endliches Coxeter-System, und sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Die Mengen $\text{NC}(W, c)$ und $\text{Sort}(W, c)$ sind in Bijektion.

Beweis. Wir zeigen, dass die Einschränkung der Abbildung nc_c aus (3) die gewünschte Bijektion ist. Mit Lemma 4.16 folgt, dass die Einschränkung $\text{nc}_c: \text{Sort}(W, c) \rightarrow \text{NC}(W, c)$ wohldefiniert ist. Sei nun umgekehrt $x \in \text{NC}(W, c)$. Wir zeigen, dass dann ein eindeutiges $w \in \text{Sort}(W, c)$ existiert, mit $\text{nc}_c(w) = x$.

(i) Wenn es einen initialen Erzeuger s von c gibt, sodass $x \in W_{\langle s \rangle}$, dann folgt mit Proposition 3.38, dass $x \leq_T sc$. Mit Induktion nach dem Rang von W gibt es ein eindeutiges sc -sortierbares Element $w \in W_{\langle s \rangle}$, sodass $\text{nc}_{sc}(w) = x$. Mit Proposition 4.7(i) ist w aber auch c -sortierbar, und es gilt $\text{nc}_c(w) = x$ analog zum Beweis von Lemma 4.16. Jedes andere $w' \in W$, das $\text{nc}_c(w') = x$ erfüllt, muss aber bereits in $W_{\langle s \rangle}$ liegen (da alle Bedeckungsspiegelungen von w' in $W_{\langle s \rangle}$ liegen), womit die Eindeutigkeit folgt.

(ii) Wenn es keinen initialen Erzeuger s von c gibt, sodass $x \in W_{\langle s \rangle}$, dann ist insbesondere $x \neq e$, und $W(x)$ ist nicht-trivial. Sei S' die Menge der Coxeter-Erzeuger von $W(x)$.

(iia) Nehmen wir zunächst an, dass es einen initialen Erzeuger s von c gibt, mit $s \in W(x)$. Dann ist $s \leq_T x$, und es folgt $sx <_T x \leq_T c$. Damit ist aber auch $xs \leq_T scs$, und mit Induktion nach ℓ_T gibt es ein eindeutiges $w \in \text{Sort}(W, scs)$ mit $\text{nc}_{scs}(w) = xs$. Man kann zeigen, dass $\ell_S(sw) < \ell_S(w)$ genau dann gilt, wenn $s \in \text{Cov}(w)$ ist (da s final in scs).

Wenn also $\ell_S(sw) < \ell_S(w)$, dann ist $s \in \text{Cov}(w)$, und es folgt $s \leq_T xs$, wegen Lemma 3.36 steht das im Widerspruch zu $xs <_T x$. Somit ist $\ell_S(sw) > \ell_S(w)$, und Proposition 4.7(ii) impliziert, dass $sw \in \text{Sort}(W, c)$. Wenn $s \notin \text{Cov}(sw)$, dann ist $\text{nc}_c(sw) = s \cdot \text{nc}_{scs}(w) \cdot s = sx \leq_T x$ nach Korollar 4.17. Da s initial in c ist, folgt aus Proposition 3.38, dass $sx \in W_{\langle s \rangle}$. Demnach liegen alle Bedeckungsspiegelungen von sw in $W_{\langle s \rangle}$, also muss auch $sw \in W_{\langle s \rangle}$ gelten. Damit folgt aber der Widerspruch $\ell_S(w) = \ell_S(s \cdot sw) > \ell_S(sw) > \ell_S(w)$. Also gilt $s \in \text{Cov}(sw)$, und Korollar 4.17 besagt $\text{nc}_c(sw) = \text{nc}_{scs}(w) \cdot s = x$.

Sei nun $w' \in \text{Sort}(W, c)$ mit $\text{nc}_c(w') = x$. Dann folgt aus $x \notin W_{\langle s \rangle}$, dass auch $w' \notin W_{\langle s \rangle}$ ist, und somit $\ell_S(sw') < \ell_S(w')$. (Die letzte Beziehung folgt, da $w' \in \text{Sort}(W, c)$ und s initial in c .) Wegen $s \leq_T x$ ist $s \in W(x)$, und damit $s \in S'$. Die Bedeckungsspiegelungen von w' sind aber gerade die Coxeter-Erzeuger von $W(x)$, also ist $s \in \text{Cov}(w')$. Mit Korollar 4.17 gilt $\text{nc}_{scs}(sw') = \text{nc}_c(w') \cdot s = xs$. Also gilt $sw' = w$ wegen der Eindeutigkeit von w , und es folgt $w' = sw$ wie gewünscht.

(iib) Es bleibt den Fall zu betrachten, dass kein initialer Erzeuger von c zu $S_0 = S'$ gehört. Wir wählen $s_0 \in S$ derart, dass s_0 initial in $c_0 = c$ ist, und setzen $c_1 = s_0 c_0 c_0$ sowie $S_1 = s_0 S_0 s_0$, und wählen s_1 initial in c_1 . Das wiederholen wir solange, bis wir im k -ten Schritt $s_k \in S_k$ erreichen. Man kann zeigen, dass diese Prozedur stets nach endlich vielen Schritten abbricht, wobei die Anzahl der Schritte nur von c und von $W(x)$ abhängt.

Wir setzen $s = s_0$ in einer solchen Folge $s_0, s_1, \dots, s_{\tau_c(W(x))}$ mit $\tau_c(W(x)) > 0$. Dann ist s initial in c , und $sS's$ ist die Menge der Coxeter-Erzeuger von $sW(x)s = W(sxs)$. Da $sxs \leq_T scs$ ist $\tau_{scs}(W(sxs)) < \tau_c(W(x))$, und mit Induktion erhalten wir ein eindeutiges $w \in \text{Sort}(W, scs)$ mit $\text{nc}_{scs}(w) = sxs$. Wenn $\ell_S(sw) < \ell_S(w)$, dann ist (wie zuvor) $s \in \text{Cov}(w)$, also ist $s \in sS's$, also $s \in S$ im Widerspruch zur Annahme. Somit ist $\ell_S(sw) > \ell_S(w)$, und Proposition 4.7(ii) impliziert dass $sw \in \text{Sort}(W, c)$. Wenn $s \in \text{Cov}(sw)$, dann liegen die übrigen Bedeckungsspiegelungen von sw in $W_{\langle s \rangle}$, und es folgt dass die Bedeckungsspiegelungen von w allesamt in $sW_{\langle s \rangle}s$ liegen. Damit ist aber $sxs = \text{nc}_{scs}(w) \in sW_{\langle s \rangle}s$, also $x \in W_{\langle s \rangle}$ im Widerspruch zur Annahme. Also ist $s \notin \text{Cov}(sw)$, und es folgt $\text{nc}_c(sw) = s \cdot \text{nc}_{scs}(w) \cdot s = x$ mit Korollar 4.17.

Wenn $w' \in \text{Sort}(W, c)$ wieder ein Element mit $\text{nc}_c(w') = x$ ist, dann folgt erneut $w' \notin W_{\langle s \rangle}$. Es folgt also $\ell_S(sw') < \ell_S(w')$, und $s \notin \text{Cov}(w')$. Mit Korollar 4.17 folgt $\text{nc}_{scs}(sw') = s \cdot \text{nc}_c(w') \cdot s = sxs$, und mit der Eindeutigkeit von w folgt $sw' = w$, und damit $w' = sw$. \square

BEISPIEL 4.19

Zur Illustration der Konstruktion zu Beginn des dritten Falls im Beweis von Satz 4.18 betrachten wir $W = A_2$, $x = s_1s_2s_1$ und $c = s_1s_2$. Offenbar ist $W(x) = \{e, s_1s_2s_1\}$ mit $S' = \{s_1s_2s_1\}$. Der einzige initiale Coxeter-Erzeuger von c ist s_1 , gehört aber nicht zu S' . Aber $S_1 = s_1S's_1 = \{s_2\}$ und s_2 ist initial in $s_2s_1 = s_1cs_1$. Also ist $\tau_c(W(x)) = 1$.

Wir erhalten das folgende Ergebnis über die Kardinalität von $\text{Sort}(W, c)$.

SATZ 4.20

Sei (W, S) ein endliches Coxeter-System, und sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Dann $\#\text{Sort}(W, c) = \text{Cat}(W)$.

Beweis. Das folgt nun aus den Sätzen 3.34 und 4.18. □

Insbesondere hängt die Anzahl der c -sortierbaren Elemente von W nicht von der konkreten Wahl von c ab.

4.3. c -Kambrische Verbände. In diesem Abschnitt betrachten wir die Einschränkung der schwachen Ordnung auf die c -sortierbaren Elemente. Im gesamten Abschnitt ist (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System.

DEFINITION 4.21

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System, und sei $c \in W$ ein Coxeter-Element. Der **c -KAMBRISCHE VERBAND** von W ist die geordnete Menge $\text{Camb}(W, c) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Sort}(W, c), \leq_S)$.

Diesen Namen müssen wir natürlich rechtfertigen. Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts beweisen wir, dass $\text{Camb}(W, c)$ einen Unterverband von (W, \leq_S) bildet.

SATZ 4.22: [6, Theorem 1.2]

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System. Für alle $c \in W$ ist $\text{Camb}(W, c)$ ein Unterverband von (W, \leq_S) .

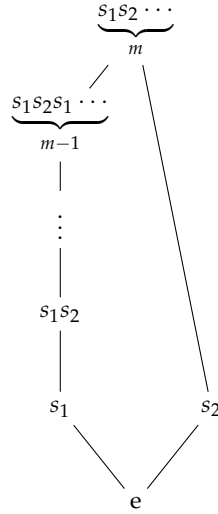


ABBILDUNG 10. Der s_1s_2 -kambrische Verband auf $I_2(m)$ mit $m < \infty$.

BEMERKUNG 4.23

Laut Definition 4.3 sind c -sortierbare für beliebige Coxeter-Systeme definiert. Dementsprechend kann man Definition 4.21 auf beliebige Coxeter-Systeme verallgemeinern. Satz 7.1 in [8] zeigt, dass diese Verallgemeinerung stets einen Unter-Halbverband der schwachen Ordnung erzeugt. Wenn u, v zwei c -sortierbare Elemente sind, mit $u \leq_S v$, dann bildet die Menge aller c -sortierbaren Elemente im Intervall $[u, v]_S$ sogar wieder einen Unterverband von $[u, v]_S$.

Der s_1s_2 -kambrische Verband von $I_2(m)$ mit $m < \infty$ ist in Abbildung 10 abgebildet, und Abbildung 11 zeigt $\text{Camb}(A_3, s_1s_2s_3)$.

LEMMA 4.24

Für $J \subseteq S$ und $w \in W$ gibt es eine eindeutige Faktorisierung $w = w_J \cdot w^J$, wobei $w_J \in W_J$ und $\ell_S(sw^J) > \ell_S(w^J)$ für $s \in J$. Außerdem gilt $\text{Inv}(w_J) = \text{Inv}(w) \cap W_J$.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass so eine Faktorisierung existiert. Dazu wählen wir $s_1 \in J$ so dass $\ell_S(s_1w) < \ell_S(w)$ gilt (falls so ein Element existiert). Nun wählen wir, iterativ, $s_i \in J$ sodass $\ell_S(s_i \cdots s_2s_1w) < \ell_S(s_{i-1} \cdots s_2s_1w)$. Nach höchstens $\ell_S(w)$ Schritten bricht dieser Prozess ab; wir finden also ein Element $w_k = s_k \cdots s_2s_1w$, derart dass $\ell_S(sw_k) > \ell_S(w_k)$ für alle $s \in J$ gilt. Damit sind $w_J = s_1s_2 \cdots s_k \in W_J$ und $w^J = w_k$ die gesuchten Elemente.

Nehmen wir nun an, dass $w = uv$ eine weitere Faktorisierung ist mit $u \in W_J$ und $\ell_S(sv) > \ell_S(v)$ für alle $s \in J$. Sei $v = s'_1s'_2 \cdots s'_l$ eine reduzierte Faktorisierung, und sei $w_J^{-1}u = s''_1s''_2 \cdots s''_q \in W_J$.

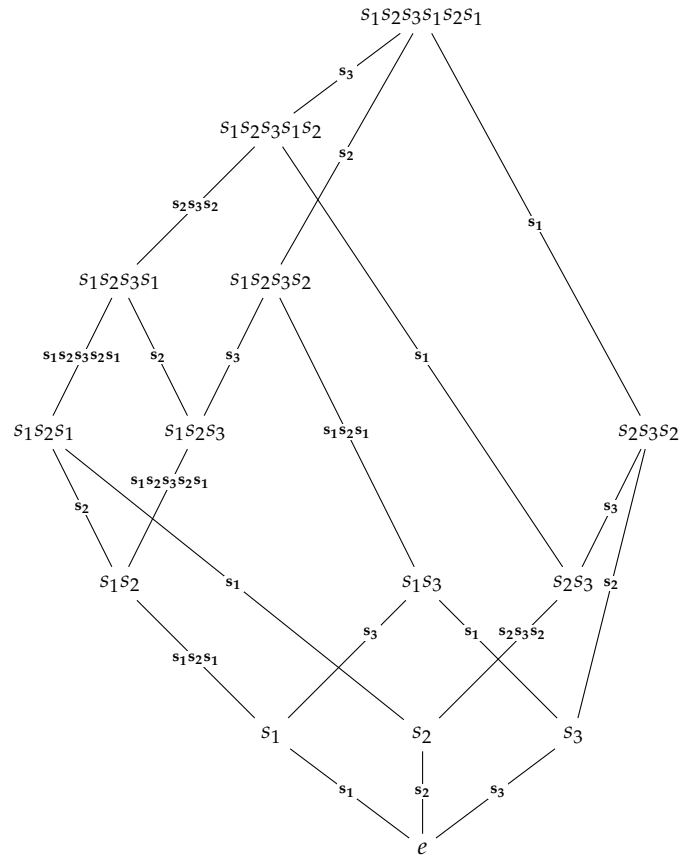


ABBILDUNG 11. Der Verband $\text{Camb}(A_3, s_1s_2s_3)$.

Dann ist

$$w^J = w_J^{-1}uv = s_1''s_2'' \cdots s_q''s_1's_2' \cdots s_l'$$

und kein reduziertes Wort von w^J kann mit $s \in J$ beginnen. Also muss w^J ein Unterwort von v sein. Analog zeigt man, dass v ein Unterwort von w^J sein muss, also folgt $v = w^J$ und damit $u = w_J$. \square

BEMERKUNG 4.25

Für $J \subseteq S$ ist die Abbildung $w \mapsto w_J$ ein Verbandshomomorphismus, also gilt $(u \vee v)_J = u_J \vee v_J$ und $(u \wedge v)_J = u_J \wedge v_J$.

BEMERKUNG 4.26

Für $J \subseteq S$ sei c_J die Einschränkung von c nach W_J . Wenn $w \in \text{Sort}(W, c)$ ist, dann ist $w_J \in \text{Sort}(W_J, c_J)$.

LEMMA 4.27

Sei $w \in W$. Wenn $s \in \text{Cov}(w)$ und $\text{Cov}(w) \setminus \{s\} \subseteq W_{\langle s \rangle}$ gilt, dann ist $w = s \vee w_{\langle s \rangle}$.

Beweis. Es gilt $\text{Inv}(s) = \{s\} \subseteq \text{Cov}(w) \subseteq \text{Inv}(w)$, und damit $s \leq_S w$ nach Proposition 2.12. Da stets $w_{\langle s \rangle} \leq_S w$ gilt, ist $s \vee w_{\langle s \rangle} \leq_S w$. Sei nun $x \in W$ mit $x \leq_S w$. Nach Definition gibt es $s' \in S$ und $t \in \text{Cov}(w)$ mit $x = ws' = tw$. Insbesondere ist $t \notin \text{Inv}(x)$. Da $\text{Inv}(w_{\langle s \rangle}) = \text{Inv}(w) \cap W_{\langle s \rangle}$, folgt nach Voraussetzung entweder $s \not\leq_S x$ oder $w_{\langle s \rangle} \not\leq_S x$. Also ist $s \vee w_{\langle s \rangle} = w$. \square

LEMMA 4.28

Für $w \in W_{\langle s \rangle}$ ist $\text{Cov}(s \vee w) = \text{Cov}(w) \cup \{s\}$.

Beweis. Sei $w' = s \vee w$. Angenommen, $s \notin \text{Cov}(w')$. Für ein beliebiges Element $x \in W$ mit $w \leq_S x \leq_S w'$ gilt $s \in \text{Inv}(x)$. Dann ist aber x bereits eine obere Schranke von s und w , also folgt der Widerspruch $w' = s \vee w \leq x \leq_S w'$. Insbesondere ist $s \in \text{Cov}(w')$.

Sei nun $t \in \text{Cov}(w') \setminus \{s\}$. Also gilt $\text{Inv}(w') \setminus \text{Inv}(tw') = \{t\}$, und es ist $\text{Inv}(w) \subseteq \text{Inv}(w') = \text{Inv}(tw') \uplus \{t\}$. Da $\text{Inv}(w) \subseteq W_{\langle s \rangle}$ ist, folgt aus $t \notin W_{\langle s \rangle}$ sofort $\text{Inv}(w) \subseteq \text{Inv}(tw')$. Da $s \neq t$ ist, folgt aber auch $s \leq_S tw'$, was den Widerspruch $w' = s \vee w \leq_S tw' \leq_S w'$ impliziert. Also ist $t \in W_{\langle s \rangle}$, und es folgt aus $\text{Inv}(w'_{\langle s \rangle}) = \text{Inv}(w') \cap W_{\langle s \rangle}$ und $\text{Inv}((tw')_{\langle s \rangle}) = \text{Inv}(tw') \cap W_{\langle s \rangle}$, dass $\text{Inv}(w'_{\langle s \rangle}) \setminus \text{Inv}((tw')_{\langle s \rangle}) = \{t\}$. Also ist $t \in \text{Cov}(w'_{\langle s \rangle})$, und mit Bemerkung 4.25 folgt $w'_{\langle s \rangle} = (s \vee w)_{\langle s \rangle s} = s_{\langle s \rangle} \vee w_{\langle s \rangle} = w$, da $w \in W_{\langle s \rangle}$. Wir haben gezeigt, dass $\text{Cov}(w') \setminus \{s\} \subseteq \text{Cov}(w)$.

Sei nun $t \in \text{Cov}(w)$, und sei $x = tw$. Sei y derart, dass $y \leq_S w'$ und $s \vee x \leq_S y$. Dann gibt es $t' \in \text{Cov}(w')$ mit $y = t'w'$. Da $w' = s \vee w$ ist $w \not\leq_S y$, und es folgt $\text{Inv}(w) \subseteq \text{Inv}(w')$, $\text{Inv}(w) \not\subseteq \text{Inv}(y)$, sowie $\text{Inv}(w') \setminus \text{Inv}(y) = \{t'\}$. Also ist $t' \in \text{Inv}(w)$. Andererseits ist $\text{Inv}(x) \subseteq \text{Inv}(s \vee x) \subseteq \text{Inv}(y) = \text{Inv}(w') \setminus \{t'\}$, also ist $t' \notin \text{Inv}(x)$. Also ist $\{t\} = \text{Inv}(w) \setminus \text{Inv}(x) = \{t'\}$, und es folgt $t = t' \in \text{Cov}(w')$. Es folgt $\text{Cov}(w') \setminus \{s\} = \text{Cov}(w)$. \square

LEMMA 4.29

Wenn s initial in c ist und $w \in \text{Sort}(W_{\langle s \rangle}, sc)$ ist, dann ist $s \vee w \in \text{Sort}(W, c)$.

Beweis. Sei s initial in c und $w \in \text{Sort}(W_{\langle s \rangle}, sc)$. Nach Satz 4.18 gibt es also ein $x \in \text{NC}(W_{\langle s \rangle}, sc)$ mit $\text{nc}_{sc}^{-1}(x) = w$; also gilt $x \leq_T sc$ nach Definition. Mit Proposition 3.38 folgt aber $x \leq_T sx \leq_T c$, also ist $sx \in \text{NC}(W, c)$, und Satz 4.18 impliziert wiederum, dass es ein $w' \in \text{Sort}(W, c)$ gibt mit $w' = \text{nc}_c(sx)$, und es gilt $\text{Cov}(w') = \text{Cov}(w) \cup \{s\}$.

Allerdings ist $\text{Cov}(w) \subseteq W_{\langle s \rangle}$ nach Proposition 3.38, sodass aus Lemma 4.27 bereits $w' = s \vee w'_{\langle s \rangle}$ folgt. Mit Bemerkung 4.26 folgt aus $w' \in \text{Sort}(W, c)$ schon $w'_{\langle s \rangle} \in \text{Sort}(W_{\langle s \rangle}, sc)$, und wegen

Lemma 4.28 ist $\text{Cov}(w'_{\langle s \rangle}) = \text{Cov}(w) \setminus \{s\} = \text{Cov}(w)$. Mit Satz 4.18 folgt $w'_{\langle s \rangle} = w$; also ist $s \vee w = s \vee w'_{\langle s \rangle} = w' \in \text{Sort}(W, c)$. \square

Wir definieren nun eine Abbildung von W nach $\text{Sort}(W, c)$.

DEFINITION 4.30: [6, Section 3]

Sei (W, S) ein endliches Coxeter-System, sei $c \in W$ ein Coxeter-Element und sei s initial in c . Die **c -KAMBRISCHE PROJEKTION** ist die Abbildung $\pi_c: W \rightarrow \text{Sort}(W, c)$, definiert über

$$\pi_c(w) = \begin{cases} e, & \text{wenn } w = e, \\ s \cdot \pi_{scs}(sw), & \text{wenn } \ell_S(sw) < \ell_S(w), \\ \pi_{sc}(w_{\langle s \rangle}), & \text{wenn } w \neq e \text{ und } \ell_S(sw) > \ell_S(w). \end{cases}$$

Wir müssen wiederum zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist.

PROPOSITION 4.31

Für alle $w \in W$ ist $\pi_c(w)$ das größte c -sortierbare Element w' mit $w' \leq_S w$.

Beweis. Sei $w \in W$ und sei s initial in c .

Wenn $\ell_S(sw) < \ell_S(w)$, dann folgt mit Induktion nach Länge, dass $\pi_{scs}(sw)$ das größte scs -sortierbare Element in $[e, sw]_S$ ist. Mit Proposition 2.14 folgt $s \cdot \pi_{scs}(sw) \leq_S w$, und $s \notin \text{Inv}(\pi_{scs}(sw))$. Proposition 4.7(ii) impliziert, dass $\pi_c(w) = s \cdot \pi_{scs}(sw)$ selbst c -sortierbar ist.

Sei nun x ein beliebiges c -sortierbares Element mit $x \leq_S w$. Wenn $\ell_S(sx) < \ell_S(x)$, dann ist nach Proposition 4.7(ii) sx aber scs -sortierbar mit $sx \leq_S sw$. Nach Konstruktion gilt $sx \leq_S \pi_{scs}(sw)$, und damit $x \leq_S s \cdot \pi_{scs}(sw) = \pi_c(w)$. Wenn $\ell_S(sx) > \ell_S(x)$, dann ist x wegen Proposition 4.7(i) sc -sortierbar in $W_{\langle s \rangle}$. Lemma 4.29 impliziert dann, dass $x \vee s$ wiederum c -sortierbar ist. Da nach Annahme $s \leq_S w$ ist, ist auch $x \vee s \leq_S w$, und nach Konstruktion ist $\ell_S(s \cdot (x \vee s)) < \ell_S(x \vee s)$, und mit dem vorigen Fall folgt $x \vee s \leq_S \pi_c(w)$ ist, also gilt dasselbe auch für x .

Wenn $\ell_S(sw) > \ell_S(w)$, dann gilt für alle $x \in \text{Sort}(W, c)$ mit $x \leq_S w$ ebenfalls $\ell_S(sx) > \ell_S(x)$, und nach Proposition 4.7(i) also $x \in \text{Sort}(W_{\langle s \rangle}, sc)$. Insbesondere ist $x \leq_S w_{\langle s \rangle}$. Mit Induktion nach dem Rang ist $\pi_{sc}(w_{\langle s \rangle}) = \pi_c(w)$ das maximale sc -sortierbare Element von $W_{\langle s \rangle}$ unterhalb von $w_{\langle s \rangle} \leq_S w$. \square

BEISPIEL 4.32

Wir betrachten zur Illustration von Proposition 4.31 die Coxeter-Gruppe $W = A_2$ und das Coxeter-Element $c = s_1s_2$. Aus Beispiel 4.5 wissen wir, dass nur $s_2s_1 \notin \text{Sort}(A_2, c)$. Außerdem ist s_1 initial in c , und $\ell_S(s_1s_2s_1) > \ell_S(s_2s_1)$ und $(s_2s_1)_{\langle s_1 \rangle} = s_2$. Damit folgt

$$\pi_c(s_2s_1) = \pi_{s_2}(s_2) = s_2.$$

KOROLLAR 4.33

Für $u, v \in W$ mit $u \leq_S v$ gilt $\pi_c(u) \leq_S \pi_c(v)$.

Beweis. Seien $u, v \in W$ mit $u \leq_S v$. Proposition 4.31 folgt, dass $\pi_c(u)$ ein c -sortierbares Element unter u ist. Also ist notwendigerweise $\pi_c(u) \leq_S \pi_c(v)$. \square

Wir zeigen zunächst, dass das Infimum zweier c -sortierbarer Elemente wieder c -sortierbar ist.

PROPOSITION 4.34

Wenn $u, v \in \text{Sort}(W, c)$ sind, dann ist $u \wedge v \in \text{Sort}(W, c)$.

Beweis. Seien $u, v \in \text{Sort}(W, c)$, und sei s initial in c .

Wenn $\ell_S(su) > \ell_S(u)$ und $\ell_S(sv) > \ell_S(v)$, dann sind nach Proposition 4.7(i) $u, v \in \text{Sort}(W_{\langle s \rangle}, sc)$. Mit Induktion nach dem Rang ist $u \wedge v \in \text{Sort}(W_{\langle s \rangle}, sc)$. Dann ist aber auch $\ell_S(s(u \wedge v)) > \ell_S(u \wedge v)$ und mit Proposition 4.7(i) ist $u \wedge v \in \text{Sort}(W, c)$.

Wenn $\ell_S(su) < \ell_S(u)$ und $\ell_S(sv) > \ell_S(v)$, dann ist $v \in W_{\langle s \rangle}$. Mit Bemerkung 4.25 ist $x \mapsto x_{\langle s \rangle}$ ein Isomorphismus von $(W_{\langle s \rangle}, \leq_S)$ nach $[e, w_{\circ\langle s \rangle}]$, wobei $w_{\circ\langle s \rangle}$ das längste Element von $W_{\langle s \rangle}$ ist. Da $u \in \text{Sort}(W, c)$ ist, folgt mit Bemerkung 4.26 $u_{\langle s \rangle} \in \text{Sort}(W_{\langle s \rangle}, sc)$, und damit ist

$$u \wedge v = (u \wedge v)_{\langle s \rangle} = u_{\langle s \rangle} \wedge v_{\langle s \rangle} = u_{\langle s \rangle} \wedge v.$$

Mit dem ersten Fall folgt dann aber $u \wedge v = u_{\langle s \rangle} \wedge v \in \text{Sort}(W, c)$.

Wenn $\ell_S(su) < \ell_S(u)$ und $\ell_S(sv) < \ell_S(v)$, dann sind nach Proposition 4.7(ii) $su, sv \in \text{Sort}(W, scs)$. Mit Induktion nach Länge ist $su \wedge sv \in \text{Sort}(W, scs)$. Mit Proposition 2.14 ist $[e, sw_{\circ}]_S \cong [s, w_{\circ}]_S$, also ist $u \wedge v = s(su \wedge sv)$, und es gilt $\ell_S(u \wedge v) > \ell_S(su \wedge sv)$. Mit Proposition 4.7(i) folgt $u \wedge v \in \text{Sort}(W, c)$. \square

PROPOSITION 4.35

Wenn $u, v \in \text{Sort}(W, c)$ sind, dann ist $u \vee v \in \text{Sort}(W, c)$.

Beweis. Seien $u, v \in \text{Sort}(W, c)$, und sei s initial in c .

Da $u \vee v \geq_S u$ folgt $\pi_c(u \vee v) \geq_S \pi_c(u) = u$ mit Korollar 4.33 und Proposition 4.31. Analog folgt $\pi_c(u \vee v) \geq_S v$, also ist $\pi_c(u \vee v)$ eine obere Schranke für u und v . Also gilt

$$u \vee v \leq_S \pi_c(u \vee v) \leq_S u \vee v,$$

mit der Definition des Supremums und Proposition 4.31. Also ist $u \vee v = \pi_c(u \vee v) \in \text{Sort}(W, c)$. \square

KOROLLAR 4.36

Es gilt $w_\circ \in \text{Sort}(W, c)$.

Nun können wir endlich Satz 4.22 beweisen.

Beweis von Satz 4.22. Das folgt aus Propositionen 4.34 und 4.35. \square

BEMERKUNG 4.37

Man kann zeigen, dass die Abbildung $\pi_c(w)$ ein surjektiver Verbandshomomorphismus ist; insbesondere entsteht $\text{Camb}(W, c)$ also als Faktorverband von (W, \leq_S) .

Abschließend stellen wir noch einen Zusammenhang zwischen den Verbänden $\text{Camb}(W, c)$ und $\mathcal{NC}(W, c)$ her. Für $X \subseteq T$ sei $W_X \stackrel{\text{def}}{=} \langle X \rangle$ die von X erzeugte parabolische Untergruppe von W .

DEFINITION 4.38

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System und $c \in W$ ein Coxeter-Element. Die **SCHERBENORDNUNG** bzgl. c auf $\text{Sort}(W, c)$ ist die Ordnungsrelation, für die $u \leq_\Sigma v$ genau dann gilt, wenn $W_{\text{Cov}(u)} \subseteq W_{\text{Cov}(v)}$.

SATZ 4.39: [7, Theorem 8.5]

Sei (W, S) ein endliches, irreduzibles Coxeter-System. Die Abbildung nc_c lässt sich zu einem Isomorphismus von $(\text{Sort}(W, c), \leq_\Sigma)$ nach $(\mathcal{NC}(W, c), \leq_T)$ fortsetzen. Es gilt also $u \leq_\Sigma v$ genau dann, wenn $\text{nc}_c(u) \leq_T \text{nc}_c(v)$ für alle $u, v \in \text{Sort}(W, c)$.

Beweis. Für $w \in \text{Sort}(W, c)$ gilt mit Satz 4.18 gerade

$$\text{nc}_c(w) = x = \prod_{t \in \widehat{\text{Cov}}_c(w)} t,$$

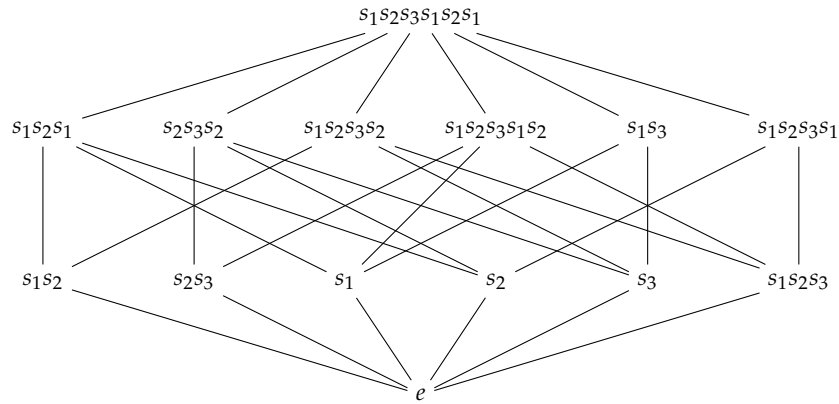


ABBILDUNG 12. Der Verband $(\text{Sort}(A_3, s_1s_2s_3), \leq_\Sigma)$.

und per Induktion nach dem Rang von W zeigt man $W(x) = \langle \{t \in T \mid t \leq_T x\} \rangle = W_{\text{Cov}(w)}$. Mit Proposition 3.37 folgt dann

$$u \leq_\Sigma v \iff W_{\text{Cov}(u)} \subseteq W_{\text{Cov}(v)} \iff W(\text{nc}_c(u)) \subseteq W(\text{nc}_c(v)) \iff \text{nc}_c(u) \leq_T \text{nc}_c(v). \quad \square$$

In Abbildung 11 ist der Verband $\text{Camb}(A_3, s_1s_2s_3)$ abgebildet, wobei die Kanten mit den jeweiligen Bedeckungsspiegelungen beschriftet sind. Abbildung 12 zeigt den Verband $(\text{Sort}(A_3, s_1s_2s_3), \leq_\Sigma)$, der isomorph zu $\mathcal{NC}(A_3, s_1s_2s_3)$ aus Abbildung 8 ist.

LITERATUR

- [1] Claude Chevalley, *Sur certains groupes simples*, Tohoku Mathematical Journal 7 (1955), 14–66.
- [2] Harold S. M. Coxeter, *The Complete Enumeration of Finite Groups of the Form $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$* , Journal of the London Mathematical Society 10 (1935), 21–25.
- [3] Henrik Eriksson and Kimmo Eriksson, *Conjugacy of Coxeter Elements* (2013), available at [arXiv:1302.2842](https://arxiv.org/abs/1302.2842).
- [4] Germain Kreweras, *Sur les partitions non croisées d'un cycle*, Discrete Mathematics 1 (1972), 333–350.
- [5] Nathan Reading, *Clusters, Coxeter-Sortable Elements and Noncrossing Partitions*, Transactions of the American Mathematical Society 359 (2007), 5931–5958.
- [6] ———, *Sortable Elements and Cambrian Lattices*, Algebra Universalis 56 (2007), 411–437.
- [7] ———, *Noncrossing Partitions and the Shard Intersection Order*, Journal of Algebraic Combinatorics 33 (2011), 483–530.
- [8] Nathan Reading and David E. Speyer, *Sortable Elements in Infinite Coxeter Groups*, Transactions of the American Mathematical Society 363 (2011), 699–761.
- [9] Jian-yi Shi, *The Enumeration of Coxeter Elements*, Journal of Algebraic Combinatorics 6 (1997), 161–171.
- [10] Louis Solomon, *The Orders of Finite Chevalley Groups*, Journal of Algebra 3 (1966), 376–393.