

GEORDNETE MENGEN IN HYPEREBENENARRANGEMENTS

HENRI MÜHLE

0. GRUNDLAGEN

0.1. Lineare und Affine Räume. Wir wiederholen ein paar grundlegende Begriffe und Ergebnisse zu linearen und affinen Räumen. Der Einfachheit halber betrachten wir den Vektorraum \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

für $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

DEFINITION 0.1

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

- **LINEAR**, wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in X$ auch $a\vec{x} + b\vec{y} \in X$ für $a, b \in \mathbb{R}$ ist;
- **AFFIN**, wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in X$ auch $t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in X$ für $t \in \mathbb{R}$ ist;
- **KONVEX**, wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in X$ auch $t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in X$ für $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ ist.

LEMMA 0.2

Jede lineare Menge ist affin, und jede affine Menge ist konvex.

DEFINITION 0.3

Für $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ihre **SUMME** definiert als $X + Y \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in X, \vec{y} \in Y\}$.

DEFINITION 0.4

Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum und sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus W$. Die Menge $A = \{\vec{x}\} + W$ ist ein **AFFINER UNTERRAUM** von \mathbb{R}^n . Die **DIMENSION** von A ist gleich der Dimension von W .

Wenn der affine Unterraum A wie in Definition 0.4 entsteht, bezeichnen wir den zugehörigen Untervektorraum W auch mit $T(A)$.

DEFINITION 0.5

Für zwei affine Unterräume A_1, A_2 von \mathbb{R}^n ist ihr **VERBINDUNGSRAUM** $A_1 \sqcup A_2$ der kleinste affine Unterraum, der A_1 und A_2 enthält.

Der Verbindungsraum ist nichts weiter als der Durchschnitt über alle affinen Räume, die A_1 und A_2 enthalten.

SATZ 0.6

Seien A_1 und A_2 zwei affine Unterräume von \mathbb{R}^n . Wenn $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ oder $A_1 = \emptyset$ oder $A_2 = \emptyset$, dann gilt

$$\dim(A_1) + \dim(A_2) = \dim(A_1 \sqcup A_2) + \dim(A_1 \cap A_2).$$

Wenn $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, sowie $A_1 \neq \emptyset$ und $A_2 \neq \emptyset$, dann gilt

$$\dim(A_1) + \dim(A_2) = \dim(A_1 \sqcup A_2) + \dim(T(A_1) \cap T(A_2)) - 1.$$

0.2. Ordnungen und Verbände. Wir wiederholen nun ein paar Begriffe aus der Ordnungstheorie. Sei dazu (P, \leq) eine geordnete Menge. Wir nennen (P, \leq) **BESCHRÄNKT**, wenn ein kleinstes Element $\hat{0}$ und ein größtes Element $\hat{1}$ existiert.

Zwei Elemente $x, y \in P$ bilden eine **BEDECKUNGSRELATION**, wenn $x < y$ und für jedes $z \in P$ mit $x \leq z \leq y$ gilt $x = z$ oder $z = y$. Wir schreiben in diesem Fall $x < y$.

Eine Teilmenge $X \subseteq P$ ist eine **KETTE**, wenn je zwei Elemente von X vergleichbar bzgl. \leq sind. Eine Kette ist **GESÄTTIGT**, wenn sich ihre Elemente als Folge von Bedeckungsrelationen schreiben lassen. Eine Kette ist **MAXIMAL**, wenn sie maximal bzgl. Inklusion ist.

Ein Element $x \in P$ heißt **MINIMAL**, wenn für alle $y \in P$ aus $y \leq x$ stets $y = x$ folgt. Dual dazu heißt $x \in P$ **MAXIMAL**, wenn für alle $y \in P$ aus $x \leq y$ stets $x = y$ folgt.

Eine geordnete Menge (P, \leq) heißt **GRADIIERT**, wenn alle maximalen Ketten die gleiche Kardinalität haben. Insbesondere besitzen gradierte Halbordnungen eine **RANGFUNKTION**. Das ist eine Funktion $\text{rk} : P \rightarrow \mathbb{N}$, die wie folgt induktiv definiert werden kann: $\text{rk}(x) = 0$ für x minimal und $\text{rk}(y) = \text{rk}(x) + 1$ für jede Bedeckungsrelation $x < y$.

Ein **VERBAND** ist eine geordnete Menge (P, \leq) in der für je zwei Elemente $x, y \in P$ das **SUPREMUM** $x \vee y$ und das **INFIMUM** $x \wedge y$ existiert. Insbesondere sind endliche Verbände beschränkt.

0.3. Die Inzidenzalgebra. Im folgenden wollen wir die Inzidenzalgebra einer geordneten Menge $\mathcal{P} = (P, \leq)$ beschreiben, wie sie in [10, Abschnitt 3] eingeführt wurde.

DEFINITION 0.7

Sei $\mathcal{P} = (P, \leq)$ eine endliche geordnete Menge. Die **INZIDENZALGEBRA** $\text{Inz}(\mathcal{P})$ ist der \mathbb{R} -Vektorraum aller Funktionen $f : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 0$ falls $x \not\leq y$. Für $f, g \in \text{Inz}(\mathcal{P})$ definieren wir ihre **FALTUNG** durch

$$(f \cdot g)(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y).$$

Wir können uns $\text{Inz}(\mathcal{P})$ im Prinzip als eine \mathbb{R} -Algebra oberer Dreiecksmatrizen vorstellen. Das neutrale Element in $\text{Inz}(\mathcal{P})$ ist die Delta-Funktion

$$\delta(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für uns sind zwei weitere Elemente von $\text{Inz}(\mathcal{P})$ von Bedeutung: die **ZETA-** und die **MÖBIUS-FUNKTION**, die wie folgt definiert werden

$$\zeta(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \leq y, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mu(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = y, \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z), & \text{sonst.} \end{cases}$$

LEMMA 0.8

In $\text{Inz}(\mathcal{P})$ gilt $(\mu \cdot \zeta)(x, y) = \delta(x, y)$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass nach Definition $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = \delta(x, y)$ gilt. Damit folgt

$$(\mu \cdot \zeta)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) \zeta(z, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = \delta(x, y).$$

□

Die Möbius-Funktion ermöglicht das folgende fundamentale Prinzip der **MÖBIUS-INVERSION**.

SATZ 0.9: [10, Proposition 2]

Seien (P, \leq) eine endliche geordnete Menge, und seien $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Die folgenden Beziehungen sind für alle $x \in P$ äquivalent.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{x \leq y} f(y); \\ f(x) &= \sum_{x \leq y} \mu(x, y) g(y). \end{aligned}$$

Beweis. Sei \mathbb{R}^P die Menge aller Funktionen $f : P \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist \mathbb{R}^P ein \mathbb{R} -Vektorraum, und $\text{Inz}(\mathcal{P})$ wirkt von links vermöge

$$(\zeta \cdot f)(x) = \sum_{x \leq y} \zeta(x, y) f(y)$$

für alle $\zeta \in \text{Inz}(\mathcal{P})$ und $f \in \mathbb{R}^P$. (Wir können diese Wirkung auch als Matrix-Vektor-Multiplikation verstehen.) Die Behauptung des Satzes kann dann so umformuliert werden, dass $g = \zeta \cdot f$ genau dann gilt, wenn $f = \mu \cdot g$ gilt. Diese Beziehung folgt direkt aus Lemma 0.8. □

Der folgende Satz von Philip Hall beschreibt eine kombinatorische Möglichkeit die Möbius-Funktion einer geordneten Menge zu berechnen.

SATZ 0.10

Sei (P, \leq) eine endliche, beschränkte geordnete Menge mit $\#P \geq 2$. Es bezeichne c_i die Anzahl aller Ketten $\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_i = \hat{1}$ der Länge i . Dann gilt

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = \sum_{i \geq 1} (-1)^i c_i.$$

Beweis. Siehe Übung. □

0.4. Die Möbiusalgebra. Nun betrachten wir die Möbius-Algebra eines endlichen Verbandes $\mathcal{L} = (L, \leq)$, die ihren Ursprung in [5] hat, und von [11] inspiriert ist.

DEFINITION 0.11

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein endlicher Verband. Die **MÖBIUS-ALGEBRA** $\text{Möb}(\mathcal{L})$ ist der \mathbb{R} -Vektorraum mit Basis L , zusammen mit der Multiplikation $x \cdot y = x \vee y$ für alle $x, y \in L$.

Eine wichtige Rolle in $\text{Möb}(\mathcal{L})$ spielen die folgenden Elemente:

$$\sigma_x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \leq y} \mu(x, y)y.$$

LEMMA 0.12

Die Menge $\{\sigma_x \mid x \in L\}$ ist eine Basis von $\text{Möb}(\mathcal{L})$.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass $\#\{\sigma_x \mid x \in L\} = \#L = \dim(\text{Möb}(\mathcal{L}))$. Mit Satz 0.9 folgt $x = \sum_{x \leq y} \sigma_y$. Es folgt, dass die σ_x ein Erzeugendensystem von $\text{Möb}(\mathcal{L})$ von minimaler Größe bilden; sie bilden also eine Basis. \square

PROPOSITION 0.13

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein endlicher Verband, und seien $x, y \in L$. Dann gilt

$$\sigma_x \cdot \sigma_y = \begin{cases} \sigma_x, & \text{wenn } x = y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir definieren uns zunächst eine \mathbb{R} -Algebra $A'(\mathcal{L})$ mit Basis $\{\sigma'_x \mid x \in L\}$ in der die Multiplikation durch

$$\sigma'_x \cdot \sigma'_y = \begin{cases} \sigma'_x, & \text{wenn } x = y, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Wir definieren weiter $x' = \sum_{x \leq s} \sigma'_s$ für $x \in L$. Dann gilt

$$x' \cdot y' = \left(\sum_{x \leq s} \sigma'_s \right) \cdot \left(\sum_{y \leq t} \sigma'_t \right) = \sum_{\substack{x \leq s \\ y \leq t}} \sigma'_s \cdot \sigma'_t = \sum_{\substack{x \leq s \\ y \leq s}} \sigma'_s = \sum_{x \vee y \leq s} \sigma'_s = (x \vee y)'$$

Die lineare Abbildung $\varphi : \text{Möb}(\mathcal{L}) \rightarrow A'(\mathcal{L})$, die durch $\varphi(x) = x'$ definiert ist, ist also ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Algebren. Wegen $\varphi(\sigma_x) = \sigma'_x$ folgt dann die gewünschte Eigenschaft. \square

KOROLLAR 0.14

Die multiplikative Identität von $\text{Möb}(\mathcal{L})$ ist $\sum_{x \in L} \sigma_x$.

Es gilt der folgende Satz von Louis Weisner.

SATZ 0.15

Sei (L, \leq) ein endlicher Verband mit $\#L \geq 2$, und sei $a \in L \setminus \{\hat{0}\}$. Dann gilt

$$\sum_{x \in L: x \vee a = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) = 0.$$

Beweis. Siehe Übung. □

Der folgende Satz von Curtis Greene beschreibt eine alternative Darstellung von $\sigma_{\hat{0}}$.

SATZ 0.16

Sei (L, \leq) ein endlicher Verband, und sei $z \in L$. Dann gilt

$$\sigma_{\hat{0}} = \left(\sum_{v \in L: v \leq z} \mu(\hat{0}, v)v \right) \left(\sum_{y \in L: y \wedge z = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y)y \right)$$

Beweis. Siehe Übung. □

Mit Hilfe der Möbius-Algebra können wir eine weitere kombinatorische Methode zur Berechnung der Möbius-Funktion in endlichen Verbänden beweisen.

Eine Teilmenge $C \subseteq L \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$ heißt **UNTERER QUERSCHNITT**, wenn für jedes $x \in L \setminus \{\hat{0}\}$ ein Element $c \in C$ mit $c \leq x$ existiert. Es gilt der folgende **QUERSCHNITT-SATZ** von Gian-Carlo Rota.

SATZ 0.17: [10, Theorem 3]

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein endlicher Verband und sei $C \subseteq L$ ein unterer Querschnitt. Dann gilt

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = \sum_{X \subseteq C: \bigvee X = \hat{1}} (-1)^{\#X}.$$

Beweis. Für $x \in L$ gilt

$$\hat{0} - x = \sum_{\hat{0} \leq y} \sigma_y - \sum_{x \leq y} \sigma_y = \sum_{x \not\leq y} \sigma_y$$

in $\text{Möb}(\mathcal{L})$. Mit Proposition 0.13 folgt

$$\prod_{x \in C} (\hat{0} - x) = \prod_{x \in C} \left(\sum_{x \not\leq y} \sigma_y \right) = \sum_{\substack{x \not\leq y \\ \text{für alle } x \in C}} \sigma_y \stackrel{(*)}{=} \sigma_{\hat{0}} = \sum_{x \in L} \mu(\hat{0}, x)x.$$

Die markierte Gleichung folgt dabei aus der Querschnitteigenschaft von C . Der Koeffizient von $\hat{1}$ in dieser Entwicklung ist offenbar $\mu(\hat{0}, \hat{1})$.

Direktes ausmultiplizieren liefert außerdem

$$\prod_{x \in C} (\hat{0} - x) = \sum_{X \subseteq C} (-1)^{\#X} \bigvee X.$$

Der Koeffizient von $\hat{1}$ in dieser Summe ist gerade $\sum_{X \subseteq C: \bigvee X = \hat{1}} (-1)^{\#X}$, und der Satz ist gezeigt. □

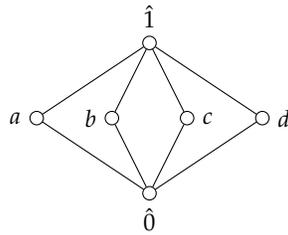


ABBILDUNG 1. Ein Verband.

BEISPIEL 0.18

Sei \mathcal{L} der in Abbildung 1 abgebildete Verband. Direktes ausrechnen liefert $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = 3$. Weiter gibt es in \mathcal{L} nur einen einzigen Querschnitt, nämlich $C = \{a, b, c, d\}$. Jede Teilmenge von C , die aus mehr als einem Element besteht, ist aufspannend. Also gilt

$$\sum_{X \subseteq C \text{ aufspannend}} (-1)^{\#X} = 6 - 4 + 1 = 3,$$

wie gewünscht.

1. ARRANGEMENTS VON HYPEREBENEN

1.1. Grundlegende Begriffe. Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen und Ergebnissen und folgen dabei im Wesentlichen [13], und benutzen die Abkürzung $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ein anderes Buch zu Hyperebenenarrangements ist [8].

DEFINITION 1.1

Für $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ and $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$H_a(\vec{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle = a\}$$

eine **(AFFINE) HYPEREBENE** von \mathbb{R}^n . Ist $a = 0$, so ist $H(\vec{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} H_0(\vec{\alpha})$ eine **LINEARE HYPEREBENE**.

Affine bzw. lineare Hyperebenen sind also nichts weiter als affine bzw. lineare Unterräume von \mathbb{R}^n der Dimension $n - 1$. Wir nennen zwei Hyperebenen H, H' **LINEAR UNABHÄNGIG**, wenn ihre Normalenvektoren linear unabhängig sind.

DEFINITION 1.2

Ein **HYPEREBENENARRANGEMENT** ist eine endliche Menge \mathcal{A} von (affinen) Hyperebenen.

Wir bezeichnen mit $\text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ die Klasse aller Hyperebenenarrangements in \mathbb{R}^n . Jede Teilmenge von $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ ist auf natürliche Weise wieder ein Hyperebenenarrangement; ein **UNTERARRANGEMENT** von \mathcal{A} .

DEFINITION 1.3

Ein Hyperebenenarrangement $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ heißt

- **LINEAR**, wenn alle $H \in \mathcal{A}$ linear sind;
- **ZENTRAL**, wenn $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$.

LEMMA 1.4

Ein Hyperebenenarrangement ist genau dann zentral, wenn es eine Verschiebung eines linearen Hyperebenenarrangements ist.

Beweis. Sei zunächst \mathcal{A} ein lineares Hyperebenenarrangement. Dann ist $\vec{0} \in H$ für alle $H \in \mathcal{A}$, und damit ist $\vec{0} \in \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$. Also ist \mathcal{A} zentral.

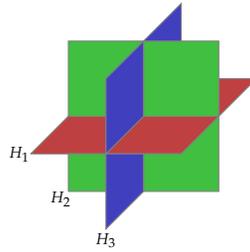
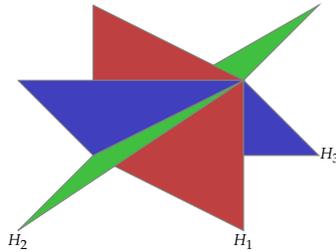
Sei nun umgekehrt \mathcal{A} zentral, und sei $\vec{v} \in \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$. Dann ist $\mathcal{A} - \{\vec{v}\} = \{H - \{\vec{v}\} \mid H \in \mathcal{A}\}$ offenbar ein lineares Hyperebenenarrangement. \square

BEISPIEL 1.5

Sei \vec{e}_i der i -te Standardbasisvektor von \mathbb{R}^n . Das **KOORDINATENARRANGEMENT** ist

$$\mathcal{C}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{H_0(\vec{e}_1), H_0(\vec{e}_2), \dots, H_0(\vec{e}_n)\}.$$

Offenbar gilt $\bigcap_{H \in \mathcal{C}(n)} H = \{\vec{0}\}$; also ist $\mathcal{C}(n)$ zentral und linear. Abbildung 2 zeigt $\mathcal{C}(3)$.

ABBILDUNG 2. Das Koordinatenarrangement $\mathcal{C}(3)$.ABBILDUNG 3. Das Zopf-Arrangement $\mathcal{B}(3)$.**BEISPIEL 1.6**

Sei $\vec{\alpha}_{i,j} = \vec{e}_i - \vec{e}_j$. Das **ZOPF-ARRANGEMENT** ist

$$\mathcal{B}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{H_0(\vec{\alpha}_{i,j}) \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Offenbar ist $\bigcap_{H \in \mathcal{B}(n)} H = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dots + \vec{e}_n\}$; also ist $\mathcal{B}(n)$ zentral und linear. Abbildung 3 zeigt $\mathcal{B}(3)$.

Die **ZOPFGRUPPE** \mathfrak{B}_n ist durch die Gruppenpräsentation

$$\mathfrak{B}_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ für } 1 \leq i < j \leq n-1 \text{ mit } |j-i| > 1, \text{ und} \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ für } i \in [n-2] \rangle$$

festgelegt. Diese Präsentation erinnert stark an die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n , die die folgende Präsentation besitzt:

$$\mathfrak{S}_n = \langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \mid s_i s_j = s_j s_i \text{ für } 1 \leq i < j \leq n-1 \text{ mit } |j-i| > 1, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ für } i \in [n-2], \text{ und } s_i^2 = \text{id für } i \in [n-1] \rangle.$$

Der Gruppenhomomorphismus $\pi : \mathfrak{B}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$, der auf den Erzeugern durch $\pi(\sigma_i) = s_i$ für $i \in [n-1]$ festgelegt ist, ist offenbar surjektiv. Der Kern dieser Abbildung ist eine Untergruppe von \mathfrak{B}_n , die **REINE ZOPFGRUPPE** \mathfrak{P}_n . Bemerkenswerterweise ist \mathfrak{P}_n die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{B}(n)$.

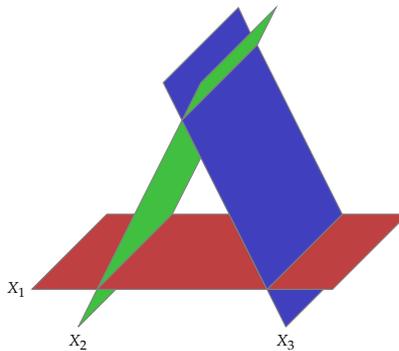


ABBILDUNG 4. Ein Hyperebenenarrangement in \mathbb{R}^3 .

BEISPIEL 1.7

Betrachten wir die folgenden drei Hyperebenen:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} &&= H((0, 0, 1)), \\ X_2 &= \{(x, y, 2 + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} &&= H_2((0, -2, 1)), \\ X_3 &= \{(x, y, 2 - 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} &&= H_2((0, 2, 1)). \end{aligned}$$

Das entsprechende Hyperebenenarrangement $\mathcal{A} = \{X_1, X_2, X_3\}$ ist in Abbildung 4 skizziert. Offenbar ist \mathcal{A} weder zentral noch linear.

1.2. Dimension und essentielle Arrangements. Das orthogonale Komplement einer Hyperebene H ist

$$H^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 0 \text{ f\u00fcr alle } \vec{x} \in T(H)\},$$

und ist nach Definition ein linearer Unterraum der Dimension 1. Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren den **NORMALENRAUM** zum \mathcal{A} als

$$N(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{x} \in H^\perp \mid H \in \mathcal{A}\}.$$

Offenbar ist $N(\mathcal{A})$ ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , also gilt $\mathbb{R}^n = N(\mathcal{A}) + N(\mathcal{A})^\perp$.

DEFINITION 1.8

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Die **DIMENSION** von \mathcal{A} ist $\dim(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\mathbb{R}^n)$. Der **RANG** von \mathcal{A} ist $\text{rk}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(N(\mathcal{A}))$. Wenn $\dim(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A})$ gilt, hei\u00dft \mathcal{A} **ESSENTIELL**.

BEMERKUNG 1.9

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ nicht essentiell. Dann ist

$$\text{ess}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{H \cap N(\mathcal{A}) \mid H \in \mathcal{A}\}$$

ein essentielles Hyperebenenarrangement in $N(\mathcal{A})$.

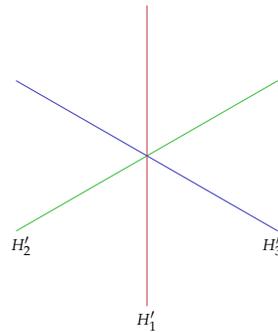


ABBILDUNG 5. Das essentielle Arrangement zu $\mathcal{B}(3)$ aus Abbildung 3.

BEISPIEL 1.10

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Dann ist

$$N(\mathcal{C}(n)) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cong \mathbb{R}^n,$$

also ist $\mathcal{C}(n)$ essentiell.

BEISPIEL 1.11

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Wir stellen fest, dass

$$\begin{aligned} N(\mathcal{B}(n)) &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{a}_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_i - \vec{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_i - \vec{e}_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \\ &\cong \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned}$$

Also ist $\text{rk}(\mathcal{B}(n)) = n - 1$, und somit ist $\mathcal{B}(n)$ nicht essentiell.

Insbesondere ist

$$N(\mathcal{B}(n))^{\perp} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \cdots + \vec{e}_n\} = \bigcap_{H \in \mathcal{B}(n)} H.$$

Abbildung 5 zeigt $\text{ess}(\mathcal{B}(3))$.

BEISPIEL 1.12

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement aus Beispiel 1.7. Es gilt

$$\begin{aligned} X_1^{\perp} &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{(0, 0, 1)\}, \\ X_2^{\perp} &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{(0, -2, 1)\}, \\ X_3^{\perp} &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{(0, 2, 1)\}. \end{aligned}$$

Da $(0, 2, 1) + (0, -2, 1) = 2(0, 0, 1)$ folgt $N(\mathcal{A}) \cong \mathbb{R}^2$, und somit ist $\text{rk}(\mathcal{A}) = 2$. Also ist \mathcal{A} nicht essentiell. Insbesondere ist $N(\mathcal{A})^{\perp} = \text{span}_{\mathbb{R}}(\vec{e}_1)$. Abbildung 6 zeigt $\text{ess}(\mathcal{A})$.

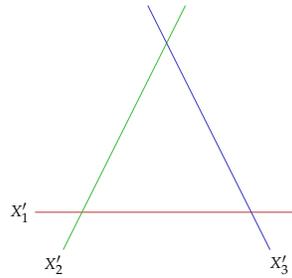


ABBILDUNG 6. Das essentielle Arrangement zum Hyperebenenarrangement aus Abbildung 4.

Wir beschreiben nun zwei Konstruktionen, wie man aus einem gegebenen Hyperebenenarrangement neue Arrangements gewinnen kann. Dazu benötigen wir eine alternative Repräsentation von Hyperebenenarrangements.

DEFINITION 1.13

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\mathcal{A} = \{H_{a_1}(\vec{a}_1), H_{a_2}(\vec{a}_2), \dots, H_{a_m}(\vec{a}_m)\}.$$

Weiter sei $\dim(\mathcal{A}) = n$ und sei $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein Vektor von Variablen. Das **DEFINIERENDE POLYNOM** von \mathcal{A} ist

$$Q_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} (\langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle - a_1)(\langle \vec{a}_2, \vec{x} \rangle - a_2) \cdots (\langle \vec{a}_m, \vec{x} \rangle - a_m).$$

BEISPIEL 1.14

Das definierende Polynom des Koordinatenarrangements ist offenbar

$$Q_{\mathcal{C}(n)}(\vec{x}) = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

BEISPIEL 1.15

Das definierende Polynom des Zopf-Arrangements ist offenbar die Vandermonde-Determinante

$$Q_{\mathcal{B}(n)}(\vec{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} x_i - x_j.$$

BEISPIEL 1.16

Das definierende Polynom des Arrangements aus Beispiel 1.7 ist

$$Q_{\mathcal{A}}(x, y, z) = z(z - 2y - 2)(z + 2y - 2).$$

Die erste Konstruktion assoziiert zu einem Hyperebenenarrangement in Dimension n ein zentrales Hyperebenenarrangement mit einer zusätzlichen Hyperebene in Dimension $n + 1$.

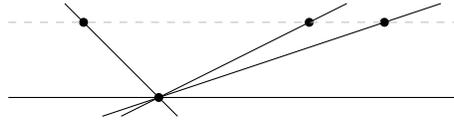


ABBILDUNG 7. Der Kegel über dem Arrangement aus Beispiel 1.18.

DEFINITION 1.17

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$Q_{\mathcal{A}}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}) - a_1)(f_2(\vec{x}) - a_2) \cdots (f_m(\vec{x}) - a_m),$$

gegeben; wobei f_1, f_2, \dots, f_m lineare Abbildungen in \mathbb{R}^n sind. Der **KEGEL ÜBER \mathcal{A}** ist das Hyperebenenarrangement $\text{cone}(\mathcal{A}) \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^{n+1})$ gegeben durch

$$Q_{\text{cone}(\mathcal{A})}(\vec{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} (f_1(\vec{x}) - a_1 y)(f_2(\vec{x}) - a_2 y) \cdots (f_m(\vec{x}) - a_m y)y,$$

wobei y eine geeignete neue Koordinate ist.

Offenbar ist $\dim(\text{cone}(\mathcal{A})) = \dim(\mathcal{A}) + 1$ und $\#\text{cone}(\mathcal{A}) = \#\mathcal{A} + 1$.

BEISPIEL 1.18

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^1)$ gegeben durch $Q_{\mathcal{A}}(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$. Abbildung 7 zeigt $\text{cone}(\mathcal{A})$, gegeben durch $Q_{\text{cone}(\mathcal{A})}(x, y) = (x - 2y)(x - 3y)(x + y)y$.

BEISPIEL 1.19

Abbildung 8 zeigt den Kegel über $\text{ess}(\mathcal{B}(3))$ aus Abbildung 5. Die Koordinatenebene zur neuen Koordinate ist in dunkelgrau dargestellt.

BEISPIEL 1.20

Abbildung 9 zeigt den Kegel über $\text{ess}(\mathcal{A})$ aus Abbildung 6. Die Koordinatenebene zur neuen Koordinate ist in dunkelgrau dargestellt.

Die zweite Konstruktion ist gewissermaßen invers zur Kegelbildung. Wir betrachten dazu den $(n - 1)$ -dimensionalen **PROJEKTIVEN RAUM** über \mathbb{R} als Quotienten

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}) / \sim,$$

bzgl. der Äquivalenzrelation \sim , gegeben durch:

$$\vec{x} \sim \vec{y} \quad \text{genau dann, wenn es } a \in \mathbb{R} \text{ gibt, sodass } \vec{y} = a\vec{x}$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

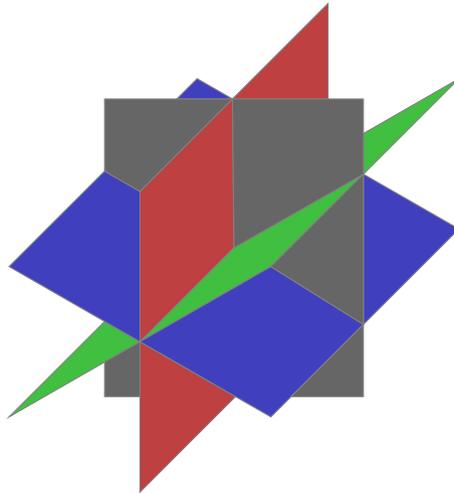


ABBILDUNG 8. Das Arrangement $\text{cone}(\text{ess}(\mathcal{B}(3)))$.

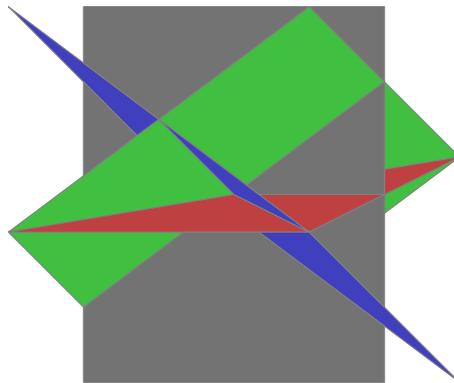


ABBILDUNG 9. Das Arrangement $\text{cone}(\text{ess}(\mathcal{A}))$, wobei \mathcal{A} das Arrangement aus Beispiel 1.7 ist.

DEFINITION 1.21

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ linear, und sei $H_0 \in \mathcal{A}$. Die **PROJEKTIVISIERUNG** von \mathcal{A} entsteht, indem man H_0 als Fernhyperebene von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ auffasst. Alle übrigen Hyperebenen in $\mathcal{A} \setminus \{H_0\}$ werden als eigentliche Hyperebenen von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ aufgefasst. Wir bezeichnen dieses Arrangement mit $\text{proj}(\mathcal{A})$.

Insbesondere ist die Projektivisierung hilfreich, um dreidimensionale Arrangements in der projektiven Ebene zu visualisieren. Insbesondere erscheint die projektive Ebene als Kreisscheibe, in der gegenüberliegende Randpunkte miteinander identifiziert werden.

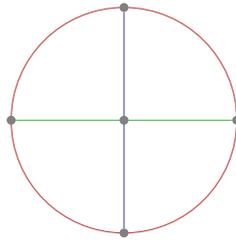
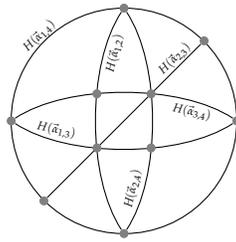
ABBILDUNG 10. Das Arrangement $\text{proj}(\mathcal{C}(3))$.ABBILDUNG 11. Das Arrangement $\text{proj}(\text{ess}(\mathcal{B}(4)))$.**BEISPIEL 1.22**

Abbildung 10 zeigt $\text{proj}(\mathcal{C}(3))$. Dabei ist die Hyperebene H_1 aus Abbildung 2 als Fernebene festgelegt.

BEISPIEL 1.23

Abbildung 11 zeigt $\text{proj}(\text{ess}(\mathcal{B}(4)))$. Dabei ist die Hyperebene $H(\vec{a}_{1,4})$ als Fernebene festgelegt.

1.3. Durchschnitte von Hyperebenen. Durchschnitte von Hyperebenen spielen eine wichtige Rolle bei der kombinatorischen Untersuchung von Hyperebenenarrangements. Wir beginnen mit einem einfachen Lemma.

LEMMA 1.24

Seien H_1, H_2, \dots, H_s linear unabhängige Hyperebenen. Dann gilt

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^s H_i \right) = n - s.$$

Beweis. Nach Definition kann für alle $i \in [s]$ die Hyperebene H_i durch die lineare Gleichung $\langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle = a_i$ beschrieben werden. Da die H_i linear unabhängig sind, ist das entsprechende Gleichungssystem, bestehend aus s Gleichungen in n Variablen, lösbar, und der Lösungsraum hat Dimension $n - s$. \square

DEFINITION 1.25

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R})$. Wir definieren die Menge aller nicht-leeren Durchschnitte der Hyperebenen in \mathcal{A} als

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigcap_{H \in X} H \mid X \subseteq \mathcal{A} \right\} \setminus \{\emptyset\}.$$

Die **DURCHSCHNITTSORDNUNG** von \mathcal{A} ist $(\mathcal{L}(\mathcal{A}), \supseteq)$.

Die Durchschnittsordnung ist eine wichtige Invariante eines Hyperebenenarrangements, und viele kombinatorische Eigenschaften lassen sich aus ihr ableiten. Im Allgemeinen werden wir $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{L}(\mathcal{A}), \supseteq)$ miteinander identifizieren.

BEMERKUNG 1.26

Es gilt $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\text{ess}(\mathcal{A}))$.

LEMMA 1.27

Für $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ gradiert, und es gilt $\text{rk}(S) = \text{codim}(S)$ für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Alle maximalen Elemente in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ haben Rang $\text{rk}(\mathcal{A})$.

Beweis. Da $\mathbb{R}^n \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, besitzt die Durchschnittsordnung ein eindeutiges kleinstes Element, und es gilt $\text{codim}(\mathbb{R}^n) = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $\text{codim}(S) = \text{codim}(S') + 1$ für $S' \triangleleft S$, und dass alle maximalen Elemente die gleiche Dimension haben.

Sei also $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, und sei $H \in \mathcal{A}$ eine Hyperebene, sodass $S \supseteq H \cap S \neq \emptyset$. Dann gilt $S \triangleleft H \cap S$ in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Nach Satz 0.6 ist $\dim(H \cap S) = \dim(S) - 1$, und damit $\text{codim}(H \cap S) = \text{codim}(S) + 1$ wie gewünscht.

Sei nun $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ so gewählt, dass $\text{codim}(S) = s$ maximal ist. Nach Lemma 1.24 lässt sich S als Durchschnitt von s linear unabhängigen Hyperebenen H_1, H_2, \dots, H_s schreiben. Sei weiter $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ mit $\text{codim}(Z) = z < s$. Damit ist Z der Durchschnitt von z Hyperebenen H'_i , und wir können ein $j \in [s]$ finden, sodass H_j linear unabhängig von den H'_i ist. Lemma 1.24 impliziert $Z \cap H_j \neq \emptyset$. Also ist $Z \supseteq Z \cap H_j$, und damit ist Z nicht maximal in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Also haben alle maximalen Elemente von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ maximale Kodimension $\text{rk}(\mathcal{A})$. \square

PROPOSITION 1.28

$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ist ein Infimum-Halbverband, und genau dann ein Verband, wenn \mathcal{A} zentral ist.

Beweis. Für $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ definieren wir $S_1 \vee S_2 = S_1 \cap S_2$.

Wenn \mathcal{A} zentral ist, ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ unter Supremumsbildung abgeschlossen, und besitzt ein kleinstes Element \mathbb{R}^n . Nach Übung Ü1 ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ also ein Verband.

Sei nun \mathcal{A} nicht zentral. Betrachte $\mathcal{L}'(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \{\emptyset\}$. Wir verwenden wieder Übung Ü1 um zu zeigen, dass $\mathcal{L}'(\mathcal{A})$ ein Verband ist. Es folgt, dass $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein Infimum-Halbverband ist. \square

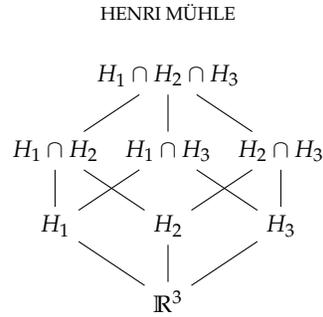


ABBILDUNG 12. Die Durchschnitsordnung von $\mathcal{C}(3)$.

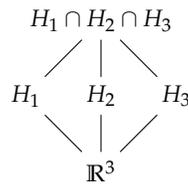


ABBILDUNG 13. Die Durchschnitsordnung von $\mathcal{B}(3)$.

BEISPIEL 1.29

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Es besteht aus genau n Hyperebenen, und $\mathcal{L}(\mathcal{C}(n))$ ist in Bijektion zu den Teilmengen von $\mathcal{C}(n)$. Dementsprechend ist die Durchschnitsordnung von $\mathcal{C}(n)$ isomorph zum Booleschen Verband mit 2^n Elementen. Abbildung 12 zeigt $\mathcal{L}(\mathcal{C}(3))$.

BEISPIEL 1.30

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Es besteht aus genau $\binom{n}{2}$ Hyperebenen, und $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n))$ ist in Bijektion mit Mengenpartitionen von $[n]$. Dementsprechend ist die Durchschnitsordnung von $\mathcal{B}(n)$ isomorph zum Partitionenverband von $[n]$. Abbildung 13 zeigt $\mathcal{L}(\mathcal{B}(3))$.

BEISPIEL 1.31

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement aus Beispiel 1.7. Es besteht aus drei Hyperebenen, und je zwei haben eine nicht-leere Schnittmenge. Die zugehörige Durchschnitsordnung ist in Abbildung 14 dargestellt.

1.4. Das charakteristische Polynom. Nun beschreiben wir eine fundamentale Invariante von Hyperebenenarrangements.

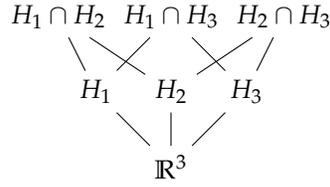


ABBILDUNG 14. Die Durchschnittsordnung des Hyperebenenarrangements aus Abbildung 4.

DEFINITION 1.32

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ und bezeichne μ die Möbius-Funktion von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Das **CHARAKTERISTISCHE POLYNOM** von \mathcal{A} ist

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})} \mu(\mathbb{R}^n, S) t^{\dim(S)}.$$

BEISPIEL 1.33

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Wir haben in Beispiel 1.29 gesehen, dass $\mathcal{L}(\mathcal{C}(n))$ isomorph zum Booleschen Verband mit 2^n Elementen ist. Im Booleschen Verband gilt $\mu(\emptyset, X) = (-1)^{\#X}$, also folgt

$$\chi_{\mathcal{C}(n)}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i t^{n-i} = (t-1)^n.$$

BEISPIEL 1.34

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Wir haben in Beispiel 1.30 gesehen, dass $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n))$ isomorph zum Verband aller Mengenpartitionen ist. Sei Π_n die Menge aller Mengenpartitionen von $[n]$, und für $\mathbf{x} \in \Pi_n$ bezeichne $\text{bl}(\mathbf{x})$ die Anzahl der Blöcke von \mathbf{x} . Sei $\mathbf{x} \in \Pi_n$ mit $\text{bl}(\mathbf{x}) = l$, wobei der i -te Block aus k_i Elementen besteht. Dann ist

$$\mu(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = (-1)^{n-l} \prod_{i=1}^l (k_i - 1)!.$$

Wir setzen nun etwas Kenntnis über die Stirling-Zahlen $s(n, l)$ der ersten Art voraus. Insbesondere zählt $(-1)^{n-l} s(n, l)$ gerade alle Permutationen von $[n]$ mit genau l Zyklen. Wenn wir jeden Zyklus einer solchen Permutation in einen Block überführen, erhalten wir eine Mengenpartition. Allerdings erhalten wir auf diese Weise im allgemeinen dieselben Partitionen mehrfach. Sei $p(n; k_1, k_2, \dots, k_l)$ die Anzahl aller Mengenpartitionen mit l Blöcken, wobei der i -te Block aus k_i Elementen besteht. Dann gilt offenbar

$$(-1)^{n-l} s(n, l) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_l=n} \left(p(n; k_1, k_2, \dots, k_l) \prod_{i=1}^l (k_i - 1)! \right).$$

Für das charakteristische Polynom von $\mathcal{B}(n)$ folgt dann

$$\begin{aligned}
 \chi_{\mathcal{B}(n)}(t) &= \sum_{\mathbf{x} \in \Pi_n} \mu(\mathbf{0}, \mathbf{x}) t^{\text{bl}(\mathbf{x})} \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \Pi_n \\ \text{bl}(\mathbf{x})=l}} \mu(\mathbf{0}, \mathbf{x}) t^l \\
 &= \sum_{l=1}^n t^l \sum_{k_1+k_2+\dots+k_l=n} \left(p(n; k_1, k_2, \dots, k_l) (-1)^{n-l} \prod_{i=1}^l (k_i - 1)! \right) \\
 &= \sum_{l=1}^n s(n, l) t^l \\
 &= t(t-1)(t-2) \cdots (t-n+1).
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ist eine bekannte Eigenschaft der Stirling-Zahlen der ersten Art.

BEISPIEL 1.35

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement aus Beispiel 1.7. Wir sehen direkt, dass

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 - 3t^2 + 3t.$$

Der folgende Satz beschreibt eine Methode um das charakteristische Polynom zu berechnen, welche auf Hassler Whitney zurückgeht.

SATZ 1.36

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})}.$$

Beweis. Wähle $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, und betrachte das Unterarrangement $\mathcal{A}_S = \{H \in \mathcal{A} \mid S \subseteq H\}$, und definiere $N_k(S)$ als die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen von \mathcal{A}_S deren Durchschnitt gerade S ist. Aus Satz 0.17 folgt

$$\mu(\mathbb{R}^n, S) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k N_k(S).$$

Das ist aber äquivalent zu

$$\mu(\mathbb{R}^n, S) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_S, \\ S = \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H}} (-1)^{\#\mathcal{B}}.$$

Aus $S = \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H$ folgt $\text{rk}(\mathcal{B}) = \text{codim}(S)$. Wenn wir nun beide Seiten mit $t^{\dim(S)}$ multiplizieren und über $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ summieren, erhalten wir die gewünschte Formel. \square

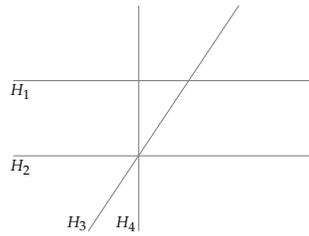


ABBILDUNG 15. Ein Hyper ebenenarrangement in \mathbb{R}^2 .

BEISPIEL 1.37

Betrachte das Hyper ebenenarrangement $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^2)$ aus Abbildung 15. Die folgende Tabelle listet die zentralen Unterarrangements von \mathcal{A} zusammen mit Rang und Kardinalität auf.

\mathcal{B}	$\text{rk}(\mathcal{B})$	$\#\mathcal{B}$
\emptyset	0	0
$\{H_1\}$	1	1
$\{H_2\}$	1	1
$\{H_3\}$	1	1
$\{H_4\}$	1	1
$\{H_1, H_3\}$	2	2
$\{H_1, H_4\}$	2	2
$\{H_2, H_3\}$	2	2
$\{H_2, H_4\}$	2	2
$\{H_3, H_4\}$	2	2
$\{H_2, H_3, H_4\}$	2	3

Das charakteristische Polynom von \mathcal{A} ist damit nach Satz 1.36:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 4t + 4.$$

BEMERKUNG 1.38

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\chi_{\text{cone}(\mathcal{A})}(t) = (t - 1)\chi_{\mathcal{A}}(t)$. Siehe auch Übung Ü12.

1.5. Löschung und Einschränkung. In diesem Abschnitt beweisen wir eine rekursive Formel zur Berechnung des charakteristischen Polynoms.

Sei dazu $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ und sei $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Wir definieren zwei Arrangements wie folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_S &\stackrel{\text{def}}{=} \{H \in \mathcal{A} \mid S \subseteq H\}, \\ \mathcal{A}^S &\stackrel{\text{def}}{=} \{S \cap H \mid S \not\subseteq H\} \setminus \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\mathcal{A}_S \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ ist und $\mathcal{A}^S \in \text{Hyp}(S)$.

LEMMA 1.39

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{A}_S) &= \{Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \mid Z \supseteq S\}, \quad \text{und} \\ \mathcal{L}(\mathcal{A}^S) &= \{Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \mid Z \subseteq S\}.\end{aligned}$$

Beweis. Wenn $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_S)$, dann ist Z ein Durchschnitt von Hyperebenen in \mathcal{A}_S , und nach Definition ist S in all diesen Hyperebenen enthalten. Also gilt auch $Z \supseteq S$.

Sei nun $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^S)$. Dann ist Z ein Durchschnitt von Hyperebenen in \mathcal{A}^S und jede solche Hyperebene lebt in S . Damit folgt $Z \subseteq S$. \square

DEFINITION 1.40

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ und sei $H_0 \in \mathcal{A}$. Definiere $\mathcal{A}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \setminus \{H_0\}$ und $\mathcal{A}'' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{H_0}$. Dann heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ ein **TRIPEL** von Arrangements mit **AUSGEZEICHNETER HYPEREBCNE** H_0 .

Wir nennen \mathcal{A}' auch die **LÖSCHUNG** und \mathcal{A}'' die **EINSCHRÄNKUNG** von \mathcal{A} .

LEMMA 1.41

Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ ein Tripel von Arrangements in \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t).$$

Beweis. Sei $H_0 \in \mathcal{A}$ die ausgezeichnete Hyperebene.

Nach Satz 1.36 gilt

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A}}(t) &= \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} \\ &= \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral,} \\ H_0 \notin \mathcal{B}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} + \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral,} \\ H_0 \in \mathcal{B}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} \\ &= \chi_{\mathcal{A}'}(t) + \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral,} \\ H_0 \in \mathcal{B}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})}.\end{aligned}$$

Sei \mathcal{B} ein zentrales Unterarrangement von \mathcal{A} mit $H_0 \in \mathcal{B}$. Setze $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{B} \setminus H_0)^{H_0}$. Dann ist $\mathcal{B}_1 \in \text{Hyp}(H_0)$, und $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}^{H_0} = \mathcal{A}''$. Außerdem ist \mathcal{B}_1 zentral, und jedes zentrale Unterarrangement von \mathcal{A}'' entsteht auf diese Weise.

Es gilt weiter $\#\mathcal{B}_1 = \#\mathcal{B} - 1$ und $\text{rk}(\mathcal{B}_1) = \text{rk}(\mathcal{B}) - 1$, und damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral,} \\ H_0 \in \mathcal{B}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} &= \sum_{\mathcal{B}_1 \in \mathcal{A}'' \text{ zentral}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} \\ &= \sum_{\mathcal{B}_1 \in \mathcal{A}'' \text{ zentral}} (-1)^{\#\mathcal{B}_1+1} t^{(n-1)-\text{rk}(\mathcal{B}_1)} \\ &= -\chi_{\mathcal{A}''}(t).\end{aligned}$$

\square

1.6. Kammern und Halbräume. Wir verwenden nun das charakteristische Polynom von \mathcal{A} um Kammern in \mathcal{A} zu zählen. Dazu halten wir zunächst fest, dass die Hyperebene $H_a(\vec{\alpha})$ den Vektorraum \mathbb{R}^n in zwei (**OFFENE**) **HALBRÄUME** teilt, nämlich

$$H_a^+(\vec{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{\alpha}, \vec{x} \rangle > a\} \quad \text{und} \quad H_a^-(\vec{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{\alpha}, \vec{x} \rangle < a\}.$$

DEFINITION 1.42

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ werden von einer Hyperebene H **GETRENNT**, wenn $\vec{x}, \vec{y} \notin H$ und $\vec{x} \in H^\pm, \vec{y} \in H^\mp$ gilt.

DEFINITION 1.43

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Eine **KAMMER** von \mathcal{A} ist der topologische Abschluss einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$.

Wir bezeichnen die Menge aller Kammern von \mathcal{A} mit $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, und wir bemerken dass $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ als Durchschnitt endlich vieler Halbräume entsteht, also ein Polyeder ist. Weiter bezeichne

$$r(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \#\mathcal{R}(\mathcal{A})$$

die Anzahl der Kammern von \mathcal{A} .

BEMERKUNG 1.44

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ genau dann, wenn $R \cap N(\mathcal{A}) \in \mathcal{R}(\text{ess}(\mathcal{A}))$.

DEFINITION 1.45

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Eine Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ heißt **BESCHRÄNKT**, wenn $R \cap N(\mathcal{A})$ (als topologische Menge) beschränkt ist. (D. h. zu jeder Umgebung U von $\vec{0}$ existiert ein $k \in \mathbb{R}$ sodass $R \cap N(\mathcal{A}) \subseteq kU$ gilt.)

Wir bezeichnen mit $b(\mathcal{A})$ die Anzahl aller beschränkten Kammern von \mathcal{A} .

BEISPIEL 1.46

Sei R die Kammer "innerhalb" der drei Hyperebenen in des Arrangements \mathcal{A} aus Abbildung 4. Als topologische Menge ist R unbeschränkt in \mathbb{R}^3 , aber $R \cap N(\mathcal{A})$ ist topologisch beschränkt in \mathbb{R}^2 ; siehe Abbildung 6. Also ist R eine beschränkte Kammer von \mathcal{A} .

BEISPIEL 1.47

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Da $\mathcal{C}(n)$ zentral ist, besitzt es nach Übung Ü13 keine beschränkten Kammern.

Sei nun $R \in \mathcal{R}(\mathcal{C}(n))$, und sei $\vec{x} \in R$. Wir erzeugen einen $\{+, -\}$ -Vektor \mathbf{v}_R der Länge n aus R wie folgt: wenn $\langle \vec{e}_i, \vec{x} \rangle > 0$, dann ist die i -te Komponente von \mathbf{v}_R ein "+", andernfalls ein "-". Das ist offenbar eine Bijektion, und es folgt $r(\mathcal{C}(n)) = 2^n$.

BEISPIEL 1.48

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Da $\mathcal{B}(n)$ zentral ist, besitzt es ebenfalls nach Übung Ü13 keine beschränkten Kammern. Um zu bestimmen, auf welcher Seite von $H_0(\vec{a}_{i,j})$ ein Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ liegt, genügt es das Vorzeichen von $x_i - x_j$ zu betrachten. (Zur Erinnerung, $\vec{a}_{i,j} = \vec{e}_i - \vec{e}_j$.) Es gilt somit entweder $x_i < x_j$ oder $x_j < x_i$. Jede Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{B}(n))$ ordnet also die Koordinaten von $\vec{x} \in R$ in einer bestimmten Reihenfolge an, bzw. permutiert sie. Also folgt $r(\mathcal{B}(n)) = n!$.

BEISPIEL 1.49

Ein Hyperebenenarrangement \mathcal{A}_m in \mathbb{R}^2 (mit $\#\mathcal{A}_m = m$) ist in **ALLGEMEINER LAGE**, wenn keine zwei Geraden parallel sind, und keine drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Wir werden nun $r(\mathcal{A}_m)$ rekursiv bestimmen. Wenn $m = 0$, dann gibt es genau eine Kammer, nämlich \mathbb{R}^2 . Wenn \mathcal{A}_k (mit $k < m$) in allgemeiner Lage ist, fügen wir eine Gerade H hinzu, sodass $\mathcal{A}_k \cup \{H\}$ in allgemeiner Lage ist. Nun laufen wir auf H entlang, beginnend an einem "Ende". Jedes Mal, wenn wir eine Gerade aus \mathcal{A}_k schneiden, erzeugen wir eine neue Kammer. Schließlich, nachdem wir die letzte Gerade überschritten haben, erzeugen wir eine letzte neue Kammer. Also gilt

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}_m) &= \#\text{Schnittpunkte} + \#\text{Geraden} + 1 \\ &= \binom{m}{2} + m + 1. \end{aligned}$$

Die Anzahl der (beschränkten) Kammern von \mathcal{A} kann auch mithilfe von Löschung und Restriktion rekursiv berechnet werden.

LEMMA 1.50

Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ ein Tripel von Arrangements in \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) &= r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}''); \\ b(\mathcal{A}) &= \begin{cases} b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}''), & \text{wenn } \text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}'), \\ 0, & \text{wenn } \text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass \mathcal{A} essentiell ist. Sei H_0 die ausgezeichnete Hyperebene.

Für die Kammern von \mathcal{A}' gibt es genau zwei Möglichkeiten, wenn wir $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{H_0\}$ betrachten: (i) entweder sie bleiben intakt, oder (ii) sie werden in zwei Teile getrennt. Sei S die Menge der Kammern von \mathcal{A}' , die von H_0 zerteilt werden, und sei U die Menge der Kammern von \mathcal{A}' , die intakt bleiben. Dann gilt $r(\mathcal{A}') = \#S + \#U$ und $r(\mathcal{A}) = 2\#S + \#U$.

Sei nun $R \in S$. Offenbar ist dann $R \cap H_0 \in \mathcal{R}(\mathcal{A}'')$. Sei umgekehrt $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}'')$. Offenbar gehören zwei Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, die nahe bei H_0 im gleichen Halbraum von H_0 liegen, zu einer Kammer $R' \in \mathcal{A}'$. Damit zerteilt H_0 diese Kammer, und wir haben eine Bijektion zwischen S und $\mathcal{R}(\mathcal{A}'')$ gefunden. Es folgt $r(\mathcal{A}'') = \#S$. Abbildung 16a illustriert diesen Fall. Wir erhalten

$$r(\mathcal{A}) = 2\#S + \#U = (\#S + \#U) + \#S = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$$



(A) Illustration der Bijektion zwischen Kammern von \mathcal{A}'' und solchen Kammern von \mathcal{A}' , die von H_0 getrennt werden.

(B) Illustration der Situation $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1$.

ABBILDUNG 16. Illustrationen zum Beweis von Lemma 1.50.

wie gewünscht.

Sei zunächst $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1$. Insbesondere ist $N(\mathcal{A}') \subsetneq \mathbb{R}^n$, was bedeutet, dass jede Kammer von \mathcal{A}' eine Gerade enthält, die orthogonal zu $N(\mathcal{A}')$ ist. Also enthält jede Kammer von \mathcal{A} eine Halbgerade, woraus direkt folgt, dass $b(\mathcal{A}) = 0$. Abbildung 16b illustriert diesen Fall.

Es bleibt der Fall $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}')$. Sei nun $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}')$. Dann gibt es mehrere Möglichkeiten.

(i) R ist beschränkt, grenzt aber nicht an H_0 . Dann ist R eine beschränkte Kammer von \mathcal{A} , aber keine Kammer von \mathcal{A}'' . (Siehe die mit X bezeichnete Kammer in Abbildung 16a.)

(ii) R ist beschränkt, und wird von H_0 in zwei beschränkte Kammern $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ zerteilt. Dann ist $R = R_1 \uplus T \uplus R_2$, wobei $T \subseteq H_0$ eine beschränkte Kammer von \mathcal{A}'' ist. (Siehe die mit Y_1 und Y_2 bezeichneten Kammern in Abbildung 16a.)

(iii) R ist unbeschränkt, und wird von H_0 in zwei Kammern $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ zerteilt, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit R_1 beschränkt in \mathcal{A} ist, und R_2 nicht. Es gilt wiederum $R = R_1 \uplus T \uplus R_2$, wobei $T \subseteq H_0$ eine beschränkte Kammer von \mathcal{A}'' ist. (Siehe die mit Z_1 und Z_2 bezeichneten Kammern in Abbildung 16a.)

Wir sehen, dass in allen Fällen die gewünschte Rekursion gilt. □

1.7. Der Satz von Zaslavsky. Zum Abschluss dieses Abschnitts präsentieren wir den folgenden Satz von Thomas Zaslavsky, mit dem man die Anzahl der (beschränkten) Kammern von $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ mithilfe des charakteristischen Polynoms bestimmen kann [14].

SATZ 1.51

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^{\dim(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(-1),$$

$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1).$$

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{A} = \emptyset$. Dann ist $\chi_{\emptyset}(t) = t^n$. Weiter ist $r(\emptyset) = 1 = b(\emptyset)$ und $\text{rk}(\emptyset) = 0$. Es folgt $(-1)^n \chi_{\emptyset}(-1) = (-1)^n (-1)^n = 1 = r(\emptyset)$ und $(-1)^0 \chi_{\emptyset}(1) = 1 = b(\emptyset)$.

Die Funktionen $r(\mathcal{A})$ und $(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(1)$, sowie $b(\mathcal{A})$ und $(-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$ erfüllen also dieselben Anfangsbedingungen. Wir zeigen, dass sie auch dieselben Rekursionen erfüllen.

Mit Lemma 1.41 erhalten wir

$$(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}'}(-1) - (-1)^n \chi_{\mathcal{A}''}(-1) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}'}(-1) + (-1)^{n-1} \chi_{\mathcal{A}''}(-1),$$

und mit Lemma 1.50 erhalten wir dieselbe Rekursion für $r(\mathcal{A})$. (Es gilt nämlich $\dim(\mathcal{A}'') = n - 1$). Also folgt $r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$.

Sei nun $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}')$. Wie im Beweis von Lemma 1.50 erhalten wir $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}'') + 1$, und damit folgt aus Lemma 1.41, dass

$$(-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1) = (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A}')} \chi_{\mathcal{A}'}(1) + (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A}'')} \chi_{\mathcal{A}''}(1).$$

Nach Lemma 1.50 ist das dieselbe Rekursion wie für $b(\mathcal{A})$.

Es bleibt der Fall $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1$. Nach Lemma 1.50 ist dann $b(\mathcal{A}) = 0$. Zudem ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}') \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}'')$, sodass nach Definition $\chi_{\mathcal{A}'}(1) = \chi_{\mathcal{A}''}(1)$ gilt. Mit Lemma 1.41 folgt $\chi_{\mathcal{A}}(1) = 0$; also ist $b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$. \square

BEISPIEL 1.52

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatensystem aus Beispiel 1.5. In Beispiel 1.47 haben wir gesehen, dass $r(\mathcal{C}(n)) = 2^n$. Mit Satz 1.51 folgt das Ergebnis ebenfalls direkt. Aus Beispiel 1.33 wissen wir, dass $\chi_{\mathcal{C}(n)}(t) = (t - 1)^n$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned} r(\mathcal{C}(n)) &= (-1)^{\dim(\mathcal{C}(n))} \chi_{\mathcal{C}(n)}(-1) \\ &= (-1)^n (-2)^n \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

BEISPIEL 1.53

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. In Beispiel 1.48 haben wir gesehen, dass $r(\mathcal{B}(n)) = n!$. Mit Satz 1.51 folgt das Ergebnis ebenfalls direkt. Aus Beispiel 1.34 wissen wir, dass $\chi_{\mathcal{B}(n)}(t) = \prod_{i=0}^{n-1} (t - i)$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned} r(\mathcal{B}(n)) &= (-1)^{\dim(\mathcal{B}(n))} \chi_{\mathcal{B}(n)}(-1) \\ &= (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} -(i + 1) \\ &= \prod_{i=1}^n i \\ &= n!. \end{aligned}$$

BEISPIEL 1.54

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement aus Beispiel 1.7. In Abbildung 6 sehen wir, dass $r(\mathcal{A}) = 7$ und $b(\mathcal{A}) = 1$. Das charakteristische Polynom von \mathcal{A} ist nach Beispiel 1.35 gerade $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 - 3t^2 + 3t$. Es gilt $\dim(\mathcal{A}) = 3$ und $\text{rk}(\mathcal{A}) = 2$. Also folgt $\chi_{\mathcal{A}}(1) = 1 = (-1)^2 b(\mathcal{A})$ und $\chi_{\mathcal{A}}(-1) = -7 = (-1)^3 r(\mathcal{A})$ wie gewünscht.

2. EIGENSCHAFTEN DER DURCHSCHNITTSORDNUNG

In diesem Abschnitt heben wir noch ein paar spezielle, verbandstheoretische Eigenschaften der Durchschnittsordnung hervor.

2.1. Geometrische Verbände. Zunächst wiederholen wir ein paar grundlegende Begriffe. Sei dazu $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein endlicher Verband. Ein **ATOM** von \mathcal{L} ist ein Element $a \in L$ für das $\hat{0} < a$ gilt, ein **KOATOM** von \mathcal{L} ist ein Element $c \in L$ für das $c < \hat{1}$ gilt.

DEFINITION 2.1

Ein endlicher, gradierter Verband (L, \leq) heißt

- **ATOMAR**, wenn sich jedes Element $x \in L$ als Supremum von Atomen darstellen lässt;
- **SUBMODULAR**, wenn für alle $x, y \in L$ gilt, dass

$$\text{rk}(x) + \text{rk}(y) \geq \text{rk}(x \wedge y) + \text{rk}(x \vee y);$$
- **GEOMETRISCH**, wenn er atomar und submodular ist.

Dabei ist in der Definition eines atomaren Verbandes das kleinste Element als Supremum über die leere Menge zu verstehen.

PROPOSITION 2.2

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Jedes Intervall von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ist ein geometrischer Verband.

Beweis. Sei $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Nach Lemma 1.39 ist das Intervall $[\mathbb{R}^n, S]$ in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ isomorph zu $\mathcal{L}(\mathcal{A}_S)$. Da \mathcal{A}_S ein zentrales Hyperebenenarrangement ist, genügt es also, die Behauptung für zentrale Arrangements zu zeigen.

Sei also \mathcal{A} zentral. Nach Lemma 1.27 und Proposition 1.28 ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein gradierter Verband. Weiterhin gilt für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, dass

$$S = \bigcap_{H \in \mathcal{A}, S \subseteq H} H,$$

also ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ atomar. Seien nun $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Da \mathcal{A} zentral ist, gilt $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, und nach Satz 0.6 gilt

$$\dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(S_1 \cap S_2) + \dim(S_1 \sqcup S_2).$$

Nach Lemma 1.27 ist $\text{rk}(S_i) = \text{codim}(S_i)$ für $i \in [2]$. In $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ gilt $S_1 \vee S_2 = S_1 \cap S_2$ und $S_1 \wedge S_2 \supseteq S_1 \sqcup S_2$. Also folgt

$$\text{rk}(S_1) + \text{rk}(S_2) \geq \text{rk}(S_1 \vee S_2) + \text{rk}(S_1 \wedge S_2).$$

Damit ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ submodular, und die Behauptung folgt. \square

Wir haben bereits in vorhergehenden Beispielen gesehen, dass die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms eines Hyperebenenarrangements stets alternierende Vorzeichen haben. Das ist kein Zufall, und folgt aus der folgenden Eigenschaft geometrischer Verbände.

SATZ 2.3

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein geometrischer Verband und seien $x, y \in L$ mit $x \leq y$. Dann ist $(-1)^{\text{rk}(y) - \text{rk}(x)} \mu(x, y) > 0$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass jedes Intervall eines geometrischen Verbandes selbst wieder ein geometrischer Verband ist, siehe Übung Ü8. Es genügt also den Fall $x = \hat{0}$ und $y = \hat{1}$ zu betrachten, und wir verwenden Induktion über $\text{rk}(\hat{1})$, den **RANG** von \mathcal{L} .

Wenn $\text{rk}(\hat{1}) = 1$, dann ist $L = \{\hat{0}, \hat{1}\}$ und es folgt $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = -1$.

Sei also $\text{rk}(\hat{1}) = n > 2$, und nehmen wir an, dass die Behauptung für alle geometrischen Verbände vom Rang $< n$ gilt. Wähle ein Atom $a \in L$ und sei $x \in L$ so, dass $a \vee x = \hat{1}$. Wenn $a \leq x$, dann ist notwendigerweise $x = \hat{1}$. Wenn $a \not\leq x$ ist, dann ist $x < \hat{1}$, und es folgt aus der Submodularität von \mathcal{L} , dass

$$n > \text{rk}(x) \geq \text{rk}(a \vee x) + \text{rk}(a \wedge x) - \text{rk}(a) = n + 0 - 1$$

Also ist $\text{rk}(x) = n - 1$, und damit gilt $x < \hat{1}$. Mit Satz 0.15 folgt

$$0 = \sum_{x \vee a = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) = \mu(\hat{0}, \hat{1}) + \sum_{a \not\leq x < \hat{1}} \mu(\hat{0}, x).$$

Da $\#L \geq 2$ ist insbesondere $a \neq \hat{1}$. Da \mathcal{L} atomar ist, gibt es mindestens ein von a verschiedenes Atom, woraus folgt, dass die Menge $\{x \in L \mid a \not\leq x < \hat{1}\}$ nicht-leer ist.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $(-1)^{n-1} \mu(\hat{0}, x) > 0$ für alle $x \in L$ mit $x < \hat{1}$. Insbesondere gilt also für $r = \sum_{a \not\leq x < \hat{1}} \mu(\hat{0}, x)$, dass $(-1)^{n-1} r > 0$. Es folgt $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = -r$, und damit auch die Behauptung. \square

KOROLLAR 2.4

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{rk}(\mathcal{A}) = n$. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von \mathcal{A} haben strikt alternierende Vorzeichen. In anderen Worten, wenn

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$$

ist, dann gilt $(-1)^{n-i} a_i > 0$ für $0 \leq i \leq n$.

Beweis. Die Behauptung folgt mit Proposition 2.2 und Satz 2.3. \square

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei angemerkt, dass geometrische Verbände in einem wesentlich allgemeineren Rahmen vorkommen, den wir hier aber nicht näher betrachten wollen.

Sei S eine endliche Menge, und sei $\mathcal{I} \subseteq \wp(S)$ eine Familie von Teilmengen von S . Dann ist das Paar $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ ein **MATROID**, wenn gilt

- $\mathcal{I} \neq \emptyset$.
- Wenn $J \in \mathcal{I}$ und $I \subseteq J$, dann ist auch $I \in \mathcal{I}$.
- Wenn $I, J \in \mathcal{I}$ mit $\#I < \#J$ sind, dann gibt es $x \in J \setminus I$, sodass $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Dann heißen die Elemente von \mathcal{I} die **UNABHÄNGIGEN MENGEN** von \mathcal{M} . Die genannten Axiome verallgemeinern lineare Unabhängigkeit in Vektorräumen. Tatsächlich bildet jeder Vektorraum, zusammen mit der Menge aller linear unabhängigen Teilmengen ein (möglicherweise unendliches) Matroid.

Matroide lassen sich äquivalent mit Hilfe eines Hüllenoperators auf S und einer Rangfunktion definieren. Die Menge aller abgeschlossenen Mengen dieses Hüllenoperators unter Inklusion bildet einen Verband, den **HÜLLENVERBAND** von \mathcal{M} , den wir mit $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ bezeichnen. Insbesondere ist $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ geometrisch, und jeder geometrische Verband entsteht auf diese Weise, siehe Übung Ü18.

Aus einem zentralen Hyper ebenenarrangement $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich ein Matroid $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ definieren, dessen unabhängige Mengen gerade die Teilmengen linear unabhängiger Hyper ebenen von \mathcal{A} sind. Insbesondere ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$. Siehe Übung Ü19.

2.2. Modulare Elemente. In einigen Fällen erlaubt das charakteristische Polynom von $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ eine schöne Faktorisierung.

LEMMA 2.5

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein Verband. Für $x, y, z \in L$ mit $x \leq y$ gilt

$$x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge y.$$

Beweis. Offenbar ist $x \leq x \vee z$, und da $x \leq y$ angenommen wurde, folgt $x \leq (x \vee z) \wedge y$.

Weiter ist $z \wedge y \leq z \leq x \vee z$ und $z \wedge y \leq y$, sodass $z \wedge y \leq (x \vee z) \wedge y$ folgt.

Wir schlussfolgern $x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge y$. □

DEFINITION 2.6

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein geometrischer Verband mit Rangfunktion rk . Ein Element $x \in L$ heißt **MODULAR**, wenn für alle $y \in L$ gilt, dass

$$\text{rk}(x) + \text{rk}(y) = \text{rk}(x \wedge y) + \text{rk}(x \vee y).$$

Wenn alle $x \in L$ modular sind, dann heißt \mathcal{L} **MODULAR**.

LEMMA 2.7

Sei \mathcal{L} ein geometrischer Verband. Alle Atome von \mathcal{L} sind modular, und das gleiche gilt für $\hat{0}$ und $\hat{1}$.

Beweis. Die Behauptung für $\hat{0}$ und $\hat{1}$ folgt unmittelbar. Sei also $a \in L$ ein Atom von \mathcal{L} , und sei $y \in L$. Wenn $a \leq y$, dann folgt die Behauptung wieder unmittelbar. Wenn $a \not\leq y$, dann ist $a \wedge y = \hat{0}$ und $y < a \vee y$. Es folgt die gewünschte Beziehung aus der Submodularität von \mathcal{L} :

$$\text{rk}(y) < \text{rk}(a \vee y) \leq \text{rk}(a) + \text{rk}(y) - \text{rk}(a \wedge y) = \text{rk}(y) + 1.$$

□

LEMMA 2.8

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein geometrischer Verband, und sei $x \in L$ modular. Wenn $y \in L$ mit $y \leq x$ modular in $[\hat{0}, x]$ ist, dann ist es auch modular in \mathcal{L} .

Beweis. Wir wählen $z \in L$ beliebig. Aus der Modularität von x folgt zunächst

$$\text{rk}(x) + \text{rk}(z) = \text{rk}(x \wedge z) + \text{rk}(x \vee z),$$

$$\text{rk}(y \vee z) + \text{rk}(x) = \text{rk}((y \vee z) \wedge x) + \text{rk}(x \vee z).$$

Weiter ist $x \wedge z \leq x$, sodass die Modularität von y in $[\hat{0}, x]$

$$\text{rk}(y) + \text{rk}(z \wedge x) = \text{rk}(y \wedge z) + \text{rk}(y \vee (z \wedge x))$$

impliziert. Aus diesen Beziehungen folgt:

$$(1) \quad \text{rk}(y) + \text{rk}(z) = \text{rk}(y \wedge z) + \text{rk}(y \vee z) + \text{rk}(y \vee (z \wedge x)) - \text{rk}((y \vee z) \wedge x).$$

Da \mathcal{L} submodular ist, gilt dann

$$\begin{aligned} \text{rk}(y \wedge z) + \text{rk}(y \vee z) &\leq \text{rk}(y) + \text{rk}(z) \\ &= \text{rk}(y \wedge z) + \text{rk}(y \vee z) + \text{rk}(y \vee (z \wedge x)) - \text{rk}((y \vee z) \wedge x), \end{aligned}$$

woraus

$$\text{rk}((y \vee z) \wedge x) \leq \text{rk}(y \vee (z \wedge x)),$$

folgt. Mit Lemma 2.5 folgt Gleichheit, sodass (1) die Modularität von y in \mathcal{L} zeigt. \square

Für den nächsten Satz benötigen wir das charakteristische Polynom eines geometrischen Verbandes $\mathcal{L} = (L, \leq)$, das wie folgt definiert ist:

$$\chi_{\mathcal{L}}(t) = \sum_{x \in L} \mu(\hat{0}, x) t^{\text{rk}(\hat{1}) - \text{rk}(x)}.$$

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ zentral und essentiell. Nach Proposition 2.2 ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein geometrischer Verband, und es gilt $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(t)$. Modulare Elemente ermöglichen eine Faktorisierung des charakteristischen Polynoms.

SATZ 2.9

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein geometrischer Verband mit $\text{rk}(\mathcal{L}) = n$, und sei $z \in L$ modular. Dann gilt

$$\chi_{\mathcal{L}}(t) = \chi_{[\hat{0}, z]}(t) \left(\sum_{y \in L: y \wedge z = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y) t^{n - \text{rk}(y) - \text{rk}(z)} \right).$$

Beweis. Seien $v, y \in L$ mit $v \leq z$ und $y \wedge z = \hat{0}$.

Offenbar ist $z \wedge (v \vee y) \geq v$. Da z modular ist, folgt

$$\begin{aligned} \text{rk}(z \wedge (v \vee y)) &= \text{rk}(z) + \text{rk}(v \vee y) - \text{rk}(z \vee y) \\ &= \text{rk}(z) + \text{rk}(v \vee y) - (\text{rk}(z) + \text{rk}(y) - \underbrace{\text{rk}(z \wedge y)}_{=0}) \\ &= \text{rk}(v \vee y) - \text{rk}(y) \\ &\stackrel{*}{\leq} \text{rk}(v) - \underbrace{\text{rk}(v \wedge y)}_{=0} \\ &= \text{rk}(v). \end{aligned}$$

Also folgt $z \wedge (v \vee y) = v$. Insbesondere ist die markierte Ungleichung (die aus der Submodularität folgt) eine Gleichung. Es folgt $\text{rk}(v \vee y) = \text{rk}(v) + \text{rk}(y)$.

Nach Satz 0.16 gilt

$$(2) \quad \sum_{x \in L} \mu(\hat{0}, x) x = \left(\sum_{v \in L: v \leq z} \mu(\hat{0}, v) v \right) \left(\sum_{y \in L: y \wedge z = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y) y \right).$$

Für geeignete $x \in L$ erhalten wir also die Beziehung

$$\mu(\hat{0}, x)x = \sum_{\substack{v \in L: v \leq z \\ y \in L: y \wedge z = \hat{0} \\ v \vee y = x}} \mu(\hat{0}, v)\mu(\hat{0}, y)vy.$$

Nehmen wir nun folgende Substitutionen in (2) vor:

$$\begin{aligned} \mu(\hat{0}, x)x &\mapsto \mu(\hat{0}, x)t^{n-\text{rk}(x)}, \\ \mu(\hat{0}, v)v &\mapsto \mu(\hat{0}, v)t^{\text{rk}(z)-\text{rk}(v)}, \\ \mu(\hat{0}, y)y &\mapsto \mu(\hat{0}, y)t^{n-\text{rk}(y)-\text{rk}(z)}. \end{aligned}$$

Nach der Vorüberlegung gilt

$$t^{\text{rk}(z)-\text{rk}(v)}t^{n-\text{rk}(y)-\text{rk}(z)} = t^{n-(\text{rk}(v)+\text{rk}(y))} = t^{n-\text{rk}(v \vee y)} = t^{n-\text{rk}(vy)},$$

also bleibt (2) unter dieser Substitution erhalten. Es gilt demnach

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{L}}(t) &= \sum_{x \in L} \mu(\hat{0}, x)t^{n-\text{rk}(x)} \\ &= \left(\sum_{v \in L: v \leq z} \mu(\hat{0}, v)t^{\text{rk}(z)-\text{rk}(v)} \right) \left(\sum_{y \in L: y \wedge z = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y)t^{n-\text{rk}(y)-\text{rk}(z)} \right) \\ &= \chi_{[\hat{0}, z]}(t) \left(\sum_{y \in L: y \wedge z = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y)t^{n-\text{rk}(y)-\text{rk}(z)} \right). \end{aligned}$$

□

Es gilt das folgende Korollar.

KOROLLAR 2.10

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ zentral und essentiell. Für $H \in \mathcal{A}$ gilt

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-1) \sum_{\substack{S \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ S \not\subseteq H}} \mu(\mathbb{R}^n, S)t^{\dim(S)-1}.$$

Beweis. Da \mathcal{A} zentral ist, ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ nach Proposition 2.2 ein geometrischer Verband, und H ist ein Atom. Nach Lemma 2.7 ist H modular. Das Intervall $[\mathbb{R}^n, H]$ ist eine zweielementige Kette, deren charakteristisches Polynom gerade $t-1$ ist. Die Behauptung folgt dann mit Satz 2.9. □

Wir haben in Satz 2.9 gesehen, wir das charakteristische Polynom eines geometrischen Verbands \mathcal{L} bzgl. eines modularen Elements faktorisieren können. Wenn \mathcal{L} genügend modulare Elemente besitzt, können wir das charakteristische Polynom sogar komplett in Linearfaktoren zerlegen.

DEFINITION 2.11

Ein geometrischer Verband $\mathcal{L} = (L, \leq)$ heißt **ÜBERAUFLÖSBAR**, wenn es eine **MODULARE KETTE** gibt, d.h. eine maximale Kette, die komplett aus modularen Elementen besteht. Ein zentrales Hyperebenenarrangement heißt **ÜBERAUFLÖSBAR**, wenn die zugehörige Durchschnittsordnung ein überauflösbarer Verband ist.

LEMMA 2.12

Seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_k$ geometrische Verbände, und sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots \times \mathcal{L}_k$. Dann ist \mathcal{L} genau dann überauflösbar, wenn für alle $i \in [k]$ der Verband \mathcal{L}_i überauflösbar ist.

Beweis. Es genügt die Behauptung für $k = 2$ zu zeigen. Seien $\mathcal{L}_1 = (L_1, \leq_1)$ und $\mathcal{L}_2 = (L_2, \leq_2)$, sowie $\mathcal{L} = (L, \leq)$. Weiter seien rk_1, rk_2 , und rk die Rangfunktionen von $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, und \mathcal{L} . Dann gilt $\text{rk}(x, y) = \text{rk}_1(x) + \text{rk}_2(y)$ für alle $x \in L_1$ und $y \in L_2$.

Seien nun $x \in L_1$ und $y \in L_2$ modular. Nach Definition gilt für alle $u \in L_1$ und $v \in L_2$:

$$\begin{aligned} \text{rk}(x, y) + \text{rk}(u, v) &= \text{rk}_1(x) + \text{rk}_1(u) + \text{rk}_2(y) + \text{rk}_2(v) \\ &= \text{rk}_1(x \wedge_1 u) + \text{rk}_1(x \vee_1 u) + \text{rk}_2(y \wedge_2 v) + \text{rk}_2(y \vee_2 v) \\ &= \text{rk}((x \wedge_1 u, y \wedge_2 v)) + \text{rk}((x \vee_1 u, y \vee_2 v)) \\ &= \text{rk}((x, y) \wedge (u, v)) + \text{rk}((x, y) \vee (u, v)). \end{aligned}$$

Also ist $(x, y) \in L$ modular. Die umgekehrte Behauptung folgt analog.

Sei nun $(x_1, y_1) \triangleleft (x_2, y_2) \triangleleft \dots \triangleleft (x_r, y_s)$ eine modulare Kette von \mathcal{L} . Dann sind $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r$ und $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_s$ modulare Ketten von \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 . Die umgekehrte Behauptung folgt analog. \square

Wir erhalten die folgende Konsequenz von Satz 2.9.

SATZ 2.13

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein überauflösbarer Verband mit $\text{rk}(\mathcal{L}) = n$ mit modularer Kette $\hat{0} = x_0 \triangleleft x_1 \triangleleft \dots \triangleleft x_n = \hat{1}$. Es bezeichne A die Menge der Atome von \mathcal{L} , und es seien für $i \in [n]$

$$e_i = \#\{a \in A \mid a \leq x_i, a \not\leq x_{i-1}\}$$

die **EXPONENTEN** von \mathcal{L} . Dann gilt

$$\chi_{\mathcal{L}}(t) = (t - e_1)(t - e_2) \cdots (t - e_n).$$

Beweis. Da x_{n-1} modular ist, gilt für alle $y \in L$, dass $y \wedge x_{n-1} = \hat{0}$ genau dann gilt, wenn $y \in A$ und $y \not\leq x_{n-1}$, oder $y = \hat{0}$. Mit Satz 2.9 folgt dann

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{L}}(t) &= \chi_{[\hat{0}, x_{n-1}]}(t) \left(\sum_{y \in L: y \wedge x_{n-1} = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y) t^{1 - \text{rk}(y)} \right) \\ &= \chi_{[\hat{0}, x_{n-1}]}(t) (t - e_n). \end{aligned}$$

Nach Übung Ü8 ist das Intervall $[\hat{0}, x_{n-1}]$ wieder ein geometrischer Verband, und es ist leicht zu zeigen, dass die x_i auch in $[\hat{0}, x_{n-1}]$ modular sind. Mit Induktion können wir also $\chi_{[\hat{0}, x_{n-1}]}(t)$ komplett faktorisieren, und erhalten die Behauptung. (Wir bemerken dabei, dass die Exponenten von $[\hat{0}, x_{n-1}]$ mit e_1, e_2, \dots, e_{n-1} übereinstimmen.) \square

BEISPIEL 2.14

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Nach Beispiel 1.29 $\mathcal{L}(\mathcal{C}(n))$ der Boolesche Verband mit 2^n Elementen ist, ist jedes Element modular. Sei $\mathcal{C}(n) = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ für eine beliebige Ordnung der Koordinatenebenen, und sei $S_i = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_i$. Dann ist $S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_n$ eine modulare Kette in $\mathcal{L}(\mathcal{C}(n))$. Offenbar gilt $H \supseteq S_i$ und $H \not\supseteq S_{i-1}$ genau dann, wenn $H = H_i$; also ist $e_1 = e_2 = \dots = e_n = 1$. Satz 2.13 impliziert dann

$$\chi_{\mathcal{C}(n)}(t) = (t-1)^n,$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.33.

BEISPIEL 2.15

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Nach Beispiel 1.30 ist $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n))$ der Verband der Mengenpartitionen von $[n]$. Sei $\mathbf{x} \in \Pi_n$ eine Mengenpartition. Es ist \mathbf{x} genau dann modular, wenn \mathbf{x} höchstens einen Block mit mehr als einem Element besitzt.

Es bezeichne dazu $\text{bl}(\mathbf{x})$ die Anzahl der Blöcke von \mathbf{x} . Wenn $\text{bl}(\mathbf{x}) = n$ ist, dann ist \mathbf{x} die diskrete Partition, und damit trivialerweise modular. Es habe nun \mathbf{x} genau einen Block A mit $r > 1$ Elementen. Also ist $\text{bl}(\mathbf{x}) = n - r + 1$, und da $\text{rk}(\mathbf{x}) = n - \text{bl}(\mathbf{x})$ gilt, folgt $\text{rk}(\mathbf{x}) = r - 1$. Sei $\mathbf{y} \in \Pi_n$ mit $\text{bl}(\mathbf{y}) = k$, und sei j die Anzahl der Blöcke von \mathbf{y} , die A schneiden. Dann ist $\text{bl}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = j + (n - r)$ und $\text{bl}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = k - j + 1$. Also gilt

$$\text{rk}(\mathbf{x}) + \text{rk}(\mathbf{y}) = r - 1 + n - k = n - (j + n - r) + n - (k - j + 1) = \text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) + \text{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}),$$

und damit ist \mathbf{x} modular.

Sei nun $\mathbf{x} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\} \in \Pi_n$ mit $\#B_1 > 1$ und $\#B_2 > 1$. Wähle $b_1 \in B_1$ und $b_2 \in B_2$. Betrachte die Partition

$$\mathbf{y} = \{(B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\}, (B_2 \setminus \{b_2\}) \cup \{b_1\}, B_3, \dots, B_k\}.$$

Dann ist $\text{rk}(\mathbf{x}) = n - k = \text{rk}(\mathbf{y})$, und es gilt

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \{B_1 \setminus \{b_1\}, B_2 \setminus \{b_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, B_3, \dots, B_k\},$$

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \{B_1 \cup B_2, B_3, \dots, B_k\},$$

mit $\text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = n - k - 2$ und $\text{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = n - k + 1$. Also ist \mathbf{x} nicht modular.

Setze $S_0 = \mathbb{R}^n$ und $S_i = H(\vec{\alpha}_{1,2}) \cap H(\vec{\alpha}_{2,3}) \cap \dots \cap H(\vec{\alpha}_{i,i+1})$ für $i \in [n-1]$. Dann ist $S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_{n-1}$ eine modulare Kette in $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n))$. Offenbar gilt für $i \geq 1$, dass $H \supseteq S_i$ und $H \not\supseteq S_{i-1}$ genau dann gilt, wenn $H = H(\vec{\alpha}_{k,i+1})$ für $k \in [i]$; also ist $e_i = i$. Da $\mathcal{B}(3)$ nicht

essentiell ist, folgt aus Ü9 und Satz 2.13:

$$\chi_{\mathcal{B}(n)}(t) = t \prod_{i=1}^{n-1} (t - i),$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.34.

Mit Hilfe von Satz 2.13 können wir also die charakteristischen Polynome von essentiellen, überauflösbaren Arrangements bestimmen. Im Falle von nicht-essentiellen, überauflösbaren Arrangements muss das charakteristische Polynom des Durchschnittsverbandes noch um den Faktor $t^{\dim(\mathcal{A}) - \text{rk}(\mathcal{A})}$ korrigiert werden.

3. GRAPHISCHE ARRANGEMENTS

In diesem Abschnitt wollen wir einen engen Zusammenhang zwischen gewissen Invarianten eines Graphen und Hyperebenenarrangements beschreiben. Die dabei auftauchenden graphischen Arrangements wurden zuerst von C. Greene eingeführt [6].

DEFINITION 3.1

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph mit $V = [n]$. Das **GRAPHISCHE ARRANGEMENT** von G ist

$$\mathcal{A}_G \stackrel{\text{def}}{=} \{H_0(\vec{\alpha}_{i,j}) \mid \{i, j\} \in E\},$$

wobei $\vec{\alpha}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_i - \vec{e}_j$ ist.

Wenn $G = K_n$ der vollständige Graph auf n Knoten ist, gilt offenbar $\mathcal{A}_{K_n} = \mathcal{B}(n)$. Also ist \mathcal{A}_G im allgemeinen einfach ein Unterarrangement von $\mathcal{B}(n)$, und damit immer zentral.

DEFINITION 3.2

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph mit $V = [n]$. Eine **KNOTENFÄRBUNG** von G ist eine Abbildung $\kappa : V \rightarrow \mathbb{N}_+$. Eine Knotenfärbung heißt **ZULÄSSIG**, wenn $\kappa(i) \neq \kappa(j)$ für $\{i, j\} \in E$.

Für $t > 0$ bezeichnen wir mit $\chi_G(t)$ die Anzahl aller zulässigen Knotenfärbungen von G mit Farben in $[t]$, und nennen $\chi_G(t)$ das **CHROMATISCHE POLYNOM** von G .

BEISPIEL 3.3

Sei $G = K_n$ der vollständige Graph auf n Knoten. Dann ist

$$\chi_{K_n}(t) = \prod_{i=0}^{n-1} (t - i),$$

denn wir haben t Möglichkeiten den ersten Knoten einzufärben, $t - 1$ Möglichkeiten, den zweiten Knoten einzufärben, und so weiter.

Wir bemerken, dass nicht nur $\mathcal{A}_{K_n} = \mathcal{B}(n)$ gilt, sondern auch $\chi_{K_n}(t) = \chi_{\mathcal{B}(n)}(t)$. Das ist kein Zufall, wie wir später sehen werden. Zunächst müssen wir aber noch den Namen "chromatisches Polynom" von $\chi_G(t)$ rechtfertigen.

LEMMA 3.4

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Dann ist $\chi_G(t)$ ein Polynom vom Grad n .

Beweis. Sei $V = [n]$, und sei $t \in \mathbb{N}_+$. Für $i \leq t$ bezeichne $e_i(G)$ die Anzahl aller zulässigen Knotenfärbungen von G mit exakt i Farben. Dann ist die Anzahl aller möglichen Kantenfärbungen von G gerade

$$\chi_G(t) = \sum_{i=0}^n \binom{t}{i} e_i(G).$$

Da $\binom{t}{i}$ ein Polynom in t ist, gilt dasselbe für $\chi_G(t)$. Weiterhin ist $e_n(G) = n!$, da jede Knotenfärbung mit genau n Farben zulässig ist. Somit ist der Grad von $\chi_G(t)$ gerade n . \square

DEFINITION 3.5

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Eine **ZUSAMMENHÄNGENDE PARTITION** von G ist eine Mengenpartition $\{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ von V sodass die Einschränkung $G|_{B_i}$ für alle $i \in [s]$ zusammenhängend ist. Die Menge aller zusammenhängenden Partitionen von G unter dualer Verfeinerungsordnung ist der **BINDUNGSVERBAND** von G .

Wir bezeichnen den Bindungsverband von G mit $\mathcal{L}(G)$. Offenbar hat $\mathcal{L}(G)$ ein kleinstes Element (die triviale Partition), und ein größtes Element (die Partition, deren Blöcke den Zusammenhangskomponenten von G entsprechen).

LEMMA 3.6

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Dann ist $\mathcal{L}(G) \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_G)$.

Beweis. Sei $V = [n]$ und sei \mathcal{A}_G das graphische Arrangement zu G .

Wähle $F \subseteq E$ und betrachte $S = \bigcap_{\{i,j\} \in F} H_0(\vec{\alpha}_{i,j})$. Nach Definition ist $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ genau dann, wenn aus $\{i, j\} \in F$ stets $x_i = x_j$ folgt. Die Zusammenhangskomponenten des Spanngraphen G_F von G bilden dann eine zusammenhängende Partition von G . (Der Spanngraph G_F entsteht als kanteninduzierter Untergraph von G . Wenn die so entstehende Knotenmenge eine echte Teilmenge von V ist, fügen wir die übrigen Knoten als einelementige Zusammenhangskomponenten zu G_F hinzu.)

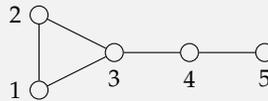
Sei umgekehrt $\mathbf{x} = \{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ eine zusammenhängende Partition. Dann ist

$$S_{\mathbf{x}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid i, j \in B_m \text{ für } m \in [s] \text{ impliziert } x_i = x_j\}$$

ein Durchschnitt von Hyperebenen. Also sind die Mengen $\mathcal{L}(\mathcal{A}_G)$ und $\mathcal{L}(G)$ in Bijektion. Die Überprüfung, dass unter dieser Bijektion \supseteq in \leq_{dref} überführt wird, ist Routine. \square

BEISPIEL 3.7

Sei G der folgende Graph.



Das zugehörige graphische Arrangement ist

$$\mathcal{A}_G = \{H_0(\vec{\alpha}_{1,2}), H_0(\vec{\alpha}_{1,3}), H_0(\vec{\alpha}_{2,3}), H_0(\vec{\alpha}_{3,4}), H_0(\vec{\alpha}_{4,5})\}.$$

Der Bindungsverband von G ist in Abbildung 17 dargestellt.

Zur Bestimmung des chromatischen Polynoms von G stellen wir fest, dass wir t Möglichkeiten haben, den Knoten 1 einzufärben, womit $t - 1$ Möglichkeiten für Knoten 2 und $t - 2$ Möglichkeiten für Knoten 3 bleiben. Die Knoten 4 und 5 können mit je $t - 1$ Farben gefärbt werden. Also folgt

$$\chi_G(t) = t(t-1)^3(t-2) = t^5 - 5t^4 + 9t^3 - t^2 + 2t.$$

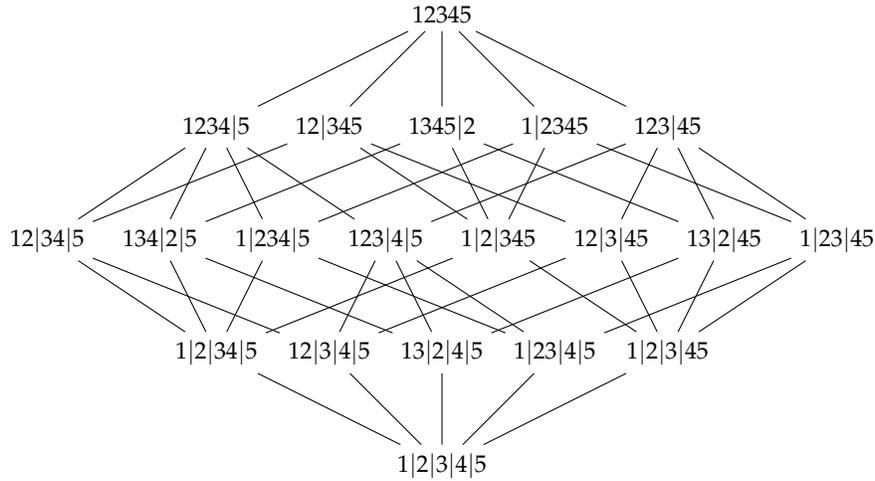


ABBILDUNG 17. Der Bindungsverband des Graphen aus Beispiel 3.7.

Wir können auch $\chi_{\mathcal{A}_G}(t)$ mithilfe des in Abbildung 17 dargestellten Bindungsverbandes bestimmen, und sehen, dass wir dasselbe Polynom erhalten.

SATZ 3.8
 Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Dann gilt $\chi_G(t) = \chi_{\mathcal{A}_G}(t)$.

Beweis. Sei $V = [n]$ und sei $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$. Für $t \in \mathbb{N}_+$ bezeichnen wir mit $\chi_{\mathbf{x}}(t)$ die Anzahl der Knotenfärbungen $\kappa : [n] \rightarrow [t]$ von G mit folgenden Eigenschaften.

- Wenn i, j im gleichen Block von \mathbf{x} liegen, dann ist $\kappa(i) = \kappa(j)$.
- Wenn i, j nicht im gleichen Block von \mathbf{x} liegen, aber $\{i, j\} \in E$ gilt, dann ist $\kappa(i) \neq \kappa(j)$.

Der Einfachheit halber identifizieren wir \mathbf{x} mit dem Teilgraphen von G , dessen Zusammenhangskomponenten von \mathbf{x} induziert werden.

Wenn $\kappa : [n] \rightarrow [t]$ eine beliebige Knotenfärbung von G ist, dann gibt es eine eindeutige zusammenhängende Partition $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(G)$ sodass κ von $\chi_{\mathbf{y}}(t)$ gezählt wird. (Die Blöcke von \mathbf{y} sind durch die Mengen

$$\{i \in [n] \mid \text{es gibt } j \in [n] \text{ mit } \{i, j\} \in E \text{ und } \kappa(i) = \kappa(j)\}$$

gegeben). Außerdem ist κ konstant auf den Blöcken von $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$ genau dann, wenn $\mathbf{x} \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}$.

Habe nun $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$ genau k Blöcke. Die Anzahl aller Abbildungen $f : [k] \rightarrow [t]$ ist offenbar t^k . Jede solche Abbildung entspricht aber auch einer Knotenfärbung von $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(G)$ mit $\mathbf{x} \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}$. (Wenn bspw. $f(i) = f(j)$ für genau zwei $i, j \in [k]$ mit $i \neq j$ gilt, dann betrachte die Partition \mathbf{x}' , die durch Vereinigung des i -ten und j -ten Block von \mathbf{x} entsteht. Wenn $\mathbf{x}' \in \mathcal{L}(G)$, dann wird f von $\chi_{\mathbf{x}'}(t)$ gezählt. Andernfalls gibt es keine Kanten zwischen den Knoten des i -ten und des j -ten Blocks von \mathbf{x} . In diesem Fall wird f von $\chi_{\mathbf{x}}(t)$ gezählt.)

Wenn $\text{bl}(\mathbf{x}) = k$ die Anzahl der Blöcke von \mathbf{x} beschreibt, gilt also

$$t^{\text{bl}(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x} \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}} \chi_{\mathbf{y}}(t).$$

Mit Möbius-Inversion in $\mathcal{L}(G)$ erhalten wir

$$\chi_{\mathbf{x}}(t) = \sum_{\mathbf{x} \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t^{\text{bl}(\mathbf{y})}.$$

Sei $S_{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_G)$ das Bild von \mathbf{x} unter der Bijektion von Lemma 3.6. Dann ist offenbar $\dim(S_{\mathbf{x}}) = \text{bl}(\mathbf{x})$. Weiterhin bezeichne $\mathbf{0}$ die triviale Partition in n Blöcke. Nach Definition ist $\chi_{\mathbf{0}}(t) = \chi_G(t)$, sodass mit Lemma 3.6 folgt:

$$\chi_G(t) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)} \mu(\mathbf{0}, \mathbf{x}) t^{\text{bl}(\mathbf{x})} = \sum_{S \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_G)} \mu(\mathbb{R}^n, S) t^{\dim(S)} = \chi_{\mathcal{A}_G}(t).$$

□

Das chromatische Polynom eines Graphen erfüllt eine ähnliche Rekursion wie Lemma 1.41. Satz 3.8 lässt sich mit Hilfe dieser Beziehung auch recht leicht beweisen.

Nun verwenden wir die Beziehung zwischen Graphen und Arrangements von Hyperebenen, um die Anzahl der azyklischen Orientierungen eines einfachen, ungerichteten Graphen zu bestimmen.

DEFINITION 3.9

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Eine **ORIENTIERUNG** σ von G ist eine Zuordnung einer Richtung $i \rightarrow j$ oder $j \rightarrow i$ zu jeder Kante $(i, j) \in E$. Ein **GERICHTETER ZYKLUS** von σ ist eine Folge von Knoten i_0, i_1, \dots, i_s sodass $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_s \rightarrow i_0$. Eine Orientierung heißt **AZYKLISCH**, wenn sie keine gerichteten Zyklen besitzt.

Offensichtlich besitzt ein einfacher, ungerichteter Graph mit m Kanten genau 2^m Orientierungen. Sei $AO(G)$ die Menge aller azyklischen Orientierungen von G .

PROPOSITION 3.10

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Es existiert eine explizite Bijektion von $\mathcal{R}(\mathcal{A}_G)$ nach $AO(G)$.

Beweis. Sei $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_G)$, und sei $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$. Damit haben wir für jede Kante $\{i, j\} \in E$ festgelegt, ob $x_i < x_j$ oder $x_j < x_i$ gilt. So erhalten wir eine Orientierung σ_R von G , in der $i \rightarrow j$ genau dann gilt, wenn $x_i < x_j$. Offenbar ist diese Zuordnung injektiv.

Angenommen σ_R besitzt einen gerichteten Zyklus $i_0 < i_1 < \dots < i_s < i_0$. Dann müsste $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ die Beziehung $x_{i_0} < x_{i_1} < \dots < x_{i_s} < x_{i_0}$ erfüllen, was offenbar ein Widerspruch ist.

Umgekehrt sei $\sigma \in AO(G)$. Wenn wir an einem beliebigen Knoten beginnen, und immer den gerichteten Kanten folgen, können wir keinen Knoten zweimal besuchen. (Andernfalls hätten wir einen gerichteten Zyklus in σ gefunden.) Da V endlich ist, landen wir irgendwann bei einem Knoten v_n , der keine ausgehenden Kanten besitzt. Wenn wir diesen Knoten aus σ entfernen, ist die übrige Orientierung immer noch azyklisch, sodass wir eine Senke v_{n-1} finden können. Wenn wir diesen Prozess weiterführen, erhalten wir eine Ordnung $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ von $[n]$. (Derart, dass

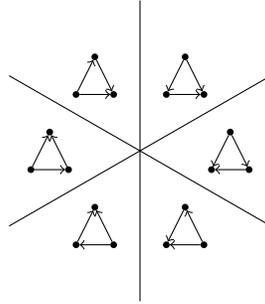


ABBILDUNG 18. Die Kammern von $\mathcal{B}(3)$ entsprechen den azyklischen Orientierungen des K_3 .

v_i eine Senke der Einschränkung von σ auf v_1, v_2, \dots, v_i ist.) Die Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_G)$, die alle Vektoren (x_1, x_2, \dots, x_n) der Form $x_{v_1} < x_{v_2} < \dots < x_{v_n}$ enthält, erfüllt offenbar $\sigma_R = \sigma$. \square

Die im zweiten Teil des Beweises von Proposition 3.10 konstruierte Ordnung $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ ist im Wesentlichen eine lineare Erweiterung des reflexiven, transitiven Abschlusses von σ .

Wir schlussfolgern das folgende, vielleicht etwas überraschende Ergebnis von Richard Stanley. Der Beweis durch Hyperebenenarrangements geht auf [7, Abschnitt 7] zurück.

KOROLLAR 3.11: [12, Korollar 1.3]

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Dann gilt $\#AO(G) = (-1)^{\#V} \chi_G(-1)$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Sätzen 1.51, 3.8 und Proposition 3.10. \square

BEISPIEL 3.12

Betrachten wir erneut den Graphen G aus Beispiel 3.7. Dieser hat fünf Kanten, also gibt es $2^5 = 32$ Orientierungen. Es gibt zwei Möglichkeiten, einen gerichteten Zyklus zu erzeugen, nämlich $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ und $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Es bleiben je zwei Kanten übrig, die beliebig orientiert werden können. Also ist $\#AO(G) = 32 - 2 \cdot 4 = 24$. Das können wir mit dem chromatischen Polynom und Korollar 3.11 verifizieren, denn es gilt

$$\begin{aligned} (-1)^5 \chi_G(-1) &= (-1) \left((-1)^5 - 5(-1)^4 + 9(-1)^3 - 7(-1)^2 + 2(-1) \right) \\ &= (-1) \left(-1 - 5 - 9 - 7 - 2 \right) \\ &= 24. \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.13

Sei $G = K_3$. Dann ist \mathcal{A}_{K_3} isomorph zu $\mathcal{B}(3)$. Abbildung 18 zeigt die Kammern von $\mathcal{B}(3)$, die mit den entsprechenden azyklischen Orientierungen des K_3 indiziert sind.

Wir haben in Beispiel 2.15 gesehen, dass das Zopf-Arrangement $\mathcal{B}(n)$ überauflösbar ist, und nach Definition 3.1 ist jedes graphische Arrangement ein Unterarrangement von $\mathcal{B}(n)$. Daher ist es nur naheliegend zu fragen, welche graphischen Arrangements noch überauflösbar sind.

Für einen Graphen $G = (V, E)$, und einen Knoten $v \in V$, sei $G \setminus \{v\}$ der von $V \setminus \{v\}$ induzierte Teilgraph von G .

DEFINITION 3.14

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **DOPPELT ZUSAMMENHÄNGEND**, wenn sowohl G als auch $G \setminus \{v\}$ für alle $v \in V$ zusammenhängend sind. Eine **SEKTION** von G ist ein maximaler, doppelt zusammenhängender Teilgraph von G .

Offenbar schneiden sich je zwei Sektionen von G in höchstens einem Knoten.

BEISPIEL 3.15

Der Graph aus Beispiel 3.7 ist nicht doppelt zusammenhängend, da er nach Entfernen eines der Knoten 3 oder 4 nicht mehr zusammenhängend ist. Seine Sektionen sind $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$.

LEMMA 3.16

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dessen Sektionen mit B_1, B_2, \dots, B_k bezeichnet sind. Dann gilt

$$\mathcal{L}(G) \cong \mathcal{L}(B_1) \times \mathcal{L}(B_2) \times \dots \times \mathcal{L}(B_k).$$

Beweis. Sei $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$ mit $\mathbf{x} = \{C_1, C_2, \dots, C_s\}$. Dann ist $C_i \cap B_j$ entweder zusammenhängend oder leer, und die nicht-leeren Durchschnitte induzieren ein (eindeutiges) Element aus $\mathcal{L}(B_1) \times \mathcal{L}(B_2) \times \dots \times \mathcal{L}(B_k)$.

Sei umgekehrt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) \in \mathcal{L}(B_1) \times \mathcal{L}(B_2) \times \dots \times \mathcal{L}(B_k)$. Nach Voraussetzung sind die Grundmengen von \mathbf{x}_i und \mathbf{x}_j Sektionen von G ; schneiden sich also in höchstens einem Element. Jedes Element von V liegt also in höchstens einem Block von \mathbf{x}_i für alle $i \in [k]$. Alle solchen Blöcke werden zu einem Block einer zusammenhängenden Partition von G vereinigt. Wenn wir dieses Verfahren auf alle Elemente von V anwenden erhalten wir eine eindeutige zusammenhängenden Partition von G .

Wir haben also eine Bijektion von $\mathcal{L}(G)$ nach $\mathcal{L}(B_1) \times \mathcal{L}(B_2) \times \dots \times \mathcal{L}(B_k)$ gefunden. Die Überprüfung, dass diese Bijektion sogar ein Verbandisomorphismus ist, ist Routine. \square

Nach Lemmas 2.12 und 3.16 können wir zur Beantwortung der Frage, wann ein graphisches Arrangement überauflösbar ist, also annehmen, dass der zugrundeliegende Graph doppelt zusammenhängend ist.

Für $v \in V$ bezeichne

$$N(v) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$$

die **NACHBARSCHAFT** von v .

PROPOSITION 3.17

Sei $G = (V, E)$ ein doppelt zusammenhängender (einfacher, ungerichteter) Graph. Ein Koatom $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$ ist genau dann modular, wenn $\mathbf{x} = \{\{v\}, V \setminus \{v\}\}$ ist, sodass $N(v)$ eine Clique bildet.

Beweis. Sei \mathbf{x} ein Koatom in $\mathcal{L}(G)$. Dann ist $\mathbf{x} = \{A, B\}$.

Seien zunächst $\#A > 1$ und $\#B > 1$. Da G doppelt zusammenhängend ist, gibt es Knoten $u, v \in A$ und $u', v' \in B$, sodass $\{u, u'\} \in E$ und $\{v, v'\} \in E$ sind. Da G einfach ist, muss also auch $u \neq u'$ und $v \neq v'$ gelten. Da A und B zusammenhängend sind, gilt dasselbe für $A' = (A \setminus \{v\}) \cup \{u'\}$ und $B' = (B \setminus \{u'\}) \cup \{v\}$. Also ist $\mathbf{y} = \{A', B'\} \in \mathcal{L}(G)$. Es gilt $\text{rk}(\mathbf{x}) = n - 2 = \text{rk}(\mathbf{y})$, sowie $\text{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = n - 1$ und $\text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = n - 4$, da

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \{A \setminus \{v\}, B \setminus \{u'\}, \{v\}, \{u'\}\}.$$

Also ist \mathbf{x} nicht modular.

Sei nun $\#A = 1$, also $A = \{v\}$. Nehmen wir zunächst an, dass es Knoten $x, y \in V \setminus \{v\}$ gibt mit $\{v, x\} \in E$ und $\{v, y\} \in E$, aber $\{x, y\} \notin E$. Betrachte $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(G)$, mit der Eigenschaft, dass der einzige Block von \mathbf{y} , der aus mehr als einem Element besteht, gerade $\{v, x, y\}$ ist. Dann ist $\text{rk}(\mathbf{x}) = n - 2$, $\text{rk}(\mathbf{y}) = 2$, und $\text{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = n - 1$ und $\text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0$. Also ist \mathbf{x} nicht modular.

Es bleibt der Fall, dass für alle $x, y \in V \setminus \{v\}$ mit $\{v, x\} \in E$ und $\{v, y\} \in E$ auch $\{x, y\} \in E$ gilt. Sei dazu $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(G)$, und sei $B' \in \mathbf{y}$ der Block von \mathbf{y} , der v enthält. Wenn $\#B' = 1$, dann ist $\mathbf{y} \leq_{\text{dref}} \mathbf{x}$ und die Modularitätsbedingung ist automatisch erfüllt. Sei nun $\#B' = r > 1$. Dann ist $\text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \text{rk}(\mathbf{y}) - 1$, und es gilt

$$\text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) + \text{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = \text{rk}(\mathbf{y}) - 1 + n - 1 = \text{rk}(\mathbf{y}) + n - 2 = \text{rk}(\mathbf{y}) + \text{rk}(\mathbf{x}).$$

□

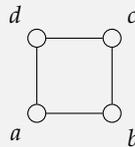
DEFINITION 3.18

Ein (einfacher, ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ heißt **TRIANGULIERT**, wenn es eine Ordnung v_1, v_2, \dots, v_n seiner Knoten gibt, sodass folgende Bedingung gilt:

Für alle $i < k, j < k$ mit $\{v_i, v_k\} \in E, \{v_j, v_k\} \in E$, folgt $\{v_i, v_j\} \in E$.

BEISPIEL 3.19

Es sei G der Kreis der Länge vier, dessen Knoten wie folgt beschriftet sind.



Es gibt 24 mögliche Anordnungen von $V = \{a, b, c, d\}$, aber keine erfüllt die Bedingung aus Definition 3.18. Sei beispielsweise a das maximale Element in einer solchen Ordnung. Dann ist stets $b < a$ und $d < a$, wobei $\{a, b\}, \{a, d\} \in E$, aber $\{b, d\} \notin E$. Die übrigen Fälle folgen analog.

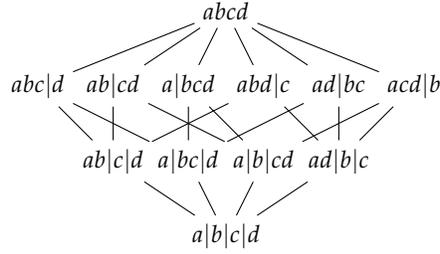


ABBILDUNG 19. Der Bindungsverband eines Kreises der Länge vier.

Abbildung 19 zeigt den Bindungsverband von G . Nach Proposition 3.17 ist keines der Koatome modular, also ist der Bindungsverband nicht überauflösbar.

Wir haben also gesehen, dass ein Kreis der Länge ≥ 4 nicht trianguliert ist. Insbesondere ist ein Graph genau dann trianguliert, wenn jeder induzierte Kreis ein Dreieck ist.

LEMMA 3.20

Sei $G = (V, E)$ ein triangulierter Graph unter der Ordnung v_1, v_2, \dots, v_n . Wenn G doppelt zusammenhängend ist, dann gilt das auch für $G \setminus \{v_n\}$.

Beweis. Sei $G' = G \setminus \{v_n\}$. Nach Voraussetzung ist G' zusammenhängend. Wähle einen beliebigen Knoten v_j von G' .

Wenn v_j nur einen Nachbarn hat, dann ist $G' \setminus \{v_j\}$ trivialerweise zusammenhängend.

Habe also v_j mindestens zwei Nachbarn v_k und v_l . Da $G \setminus \{v_j\}$ zusammenhängend ist, gibt es Wege von v_k zu v_n und von v_l zu v_n . Seien v'_k und v'_l die jeweils letzten von v_n verschiedenen Knoten auf so einem Weg. Nach Voraussetzung ist $\{v'_k, v'_l\} \in E$. Insbesondere existiert ein Weg von v_k nach v_l in $G' \setminus \{v_j\}$. Somit ist $G' \setminus \{v_j\}$ zusammenhängend.

Es folgt, dass G' doppelt zusammenhängend ist. \square

SATZ 3.21

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Das graphische Arrangement \mathcal{A}_G ist genau dann überauflösbar, wenn G trianguliert ist.

Beweis. Wie bereits angemerkt, genügt es den Fall, dass G doppelt zusammenhängend ist, zu betrachten.

Sei zunächst G ein triangulierter Graph unter der Ordnung v_1, v_2, \dots, v_n . Definiere $\mathbf{x}_{n-1} = \{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}, \{v_n\}\}$. Da G trianguliert ist, folgt mit Proposition 3.17, dass \mathbf{x}_{n-1} ein modulares Koatom von $\mathcal{L}(G)$ ist. Offenbar ist $G \setminus \{v_n\}$ immer noch trianguliert, und nach Lemma 3.20 auch doppelt zusammenhängend. Also ist $\mathbf{x}'_{n-2} = \{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}, \{v_{n-1}\}\}$ ein modulares Koatom von $\mathcal{L}(G \setminus \{v_n\})$. Nach Lemma 2.8 ist $\mathbf{x}_{n-2} = \{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}, \{v_{n-1}\}, \{v_n\}\}$ modular in $\mathcal{L}(G)$. Wiederholte Anwendung dieses Vorgehens liefert eine modulare Kette in $\mathcal{L}(G)$, also ist \mathcal{A}_G nach Satz 3.8 überauflösbar.

Dann ist $\mathbf{x}_1 \leq_{\text{dref}} \mathbf{x}_2 \leq_{\text{dref}} \cdots \leq_{\text{dref}} \mathbf{x}_n$ eine maximale Kette in $\mathcal{L}(G)$, und nach Proposition 3.17 ist \mathbf{x}_{n-1} modular. Mit Lemma 2.8 und Proposition 3.17 folgt, dass alle \mathbf{x}_i modular sind, also ist $\mathcal{L}(G)$ überauflösbar.

Sei umgekehrt G ein Graph, dessen Bindungsverband $\mathcal{L}(G)$ überauflösbar ist, und sei $\mathbf{y}_1 \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}_2 \leq_{\text{dref}} \cdots \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}_n$ eine modulare Kette. Da \mathbf{y}_{n-1} ein modulares Koatom von $\mathcal{L}(G)$ ist, folgt nach Proposition 3.17, dass $\mathbf{y} = \{\{v\}, V \setminus \{v\}\}$, sodass $N(v)$ eine Clique ist. Wir setzen $v_n = v$ und betrachten $G \setminus \{v\}$. Der Bindungsverband $\mathcal{L}(G \setminus \{v\})$ ist immernoch überauflösbar. Wiederholte Anwendung von Proposition 3.17 liefert eine Ordnung der Knoten von G , die zeigt, dass G trianguliert ist. \square

4. DIE METHODE DER ENDLICHEN KÖRPER

In diesem Abschnitt beschreiben wir eine Methode zur Berechnung des charakteristischen Polynoms eines Hyperebenenarrangements \mathcal{A} über \mathbb{Q}^n , die auf Reduktion modulo einer genügend großen Primzahl beruht. Wenn \mathcal{A} über \mathbb{Q} definiert ist, kann das definierende Polynom von \mathcal{A} derart modifiziert werden, dass ausschließlich ganzzahlige Koeffizienten vorkommen, sodass eine Reduktion modulo einer Primzahl sinnvoll möglich ist.

Die grundlegende Idee ist nun folgende: wir suchen eine genügend große Primzahl p , sodass das Hyperebenenarrangement \mathcal{A}_p über \mathbb{F}_p , dessen definierendes Polynom dem von \mathcal{A} modulo p entspricht, das gleiche charakteristische Polynom wie \mathcal{A} hat. Es lässt sich dann zeigen, dass die Auswertung $\chi_{\mathcal{A}}(p)$ gerade der Anzahl der Elemente von \mathbb{F}_p^n entspricht, die in keiner der Hyperebenen von \mathcal{A}_p liegen. Weiterhin lässt sich zeigen, dass so eine Reduktion für unendlich viele Primzahlen möglich ist, wodurch sich $\chi_{\mathcal{A}}$ bestimmen lässt.

Diese Methode geht indirekt auf Arbeiten von Henry Crapo und Gian-Carlo Rota zurück [3, Abschnitt 17], und wurde von später Christos Athanasiadis formalisiert [1].

DEFINITION 4.1

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{Q}^n)$, und sei p eine Primzahl. Es sei \mathcal{A}_p das Arrangement über dem endlichen Körper \mathbb{F}_p , dessen definierendes Polynom durch Reduktion von $Q_{\mathcal{A}}(\vec{x})$ modulo p entsteht. Wenn $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ gilt, dann nennen wir \mathcal{A}_p eine **GUTE REDUKTION** von \mathcal{A} modulo p .

BEISPIEL 4.2

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{Q})$ gegeben durch $Q_{\mathcal{A}} = x(x - 10)$. Die Durchschnittsordnung von \mathcal{A} besteht aus drei Elementen, nämlich \mathbb{Q} , 0 und 10. Für $p \notin \{2, 5\}$ erhalten wir eine gute Reduktion von \mathcal{A} , da in diesem Fall 0 und 10 über \mathbb{F}_p unterscheidbar sind.

PROPOSITION 4.3

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{Q}^n)$. Dann besitzt \mathcal{A} eine gute Reduktion für alle bis auf endlich viele Primzahlen p .

Beweis. Sei nun $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_m\}$, wobei H_i durch $\langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle = a_i$ gegeben ist. Für $i_1, i_2, \dots, i_k \subseteq [m]$ ist $H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap \dots \cap H_{i_k} \neq \emptyset$ genau dann, wenn

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \vec{a}_{i_1} & a_{i_1} \\ \vec{a}_{i_2} & a_{i_2} \\ \vdots & \vdots \\ \vec{a}_{i_k} & a_{i_k} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \vec{a}_{i_1} \\ \vec{a}_{i_2} \\ \vdots \\ \vec{a}_{i_k} \end{pmatrix},$$

und in diesem Fall ist

$$\dim(H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap \dots \cap H_{i_k}) = n - \text{rank} \begin{pmatrix} \vec{a}_{i_1} \\ \vec{a}_{i_2} \\ \vdots \\ \vec{a}_{i_k} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun die folgende Koeffizientenmatrix von \mathcal{A} :

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m \end{pmatrix}.$$

Eine beliebige $r \times s$ -Teilmatrix A' von A hat genau dann Rang t , wenn es eine $t \times t$ -Teilmatrix B von A' gibt, mit $\det(B) \neq 0$.

Damit ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ genau dann der Fall, wenn es eine endliche Menge \mathcal{S} von quadratischen Teilmatrizen von A gibt, die folgende Eigenschaft besitzen:

$$\text{Für alle } B \in \mathcal{S} \text{ ist } \det(B) \neq 0, \text{ aber } \det(B) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da \mathcal{S} endlich ist, kann es auch nur endlich viele Primzahlen p geben mit $p \mid \det(B)$ für $B \in \mathcal{S}$. Also ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ für genügend große p . \square

Der Hauptgrund für die Betrachtung von Reduktionen modulo p ist der folgende Satz.

SATZ 4.4

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{Q}^n)$ und sei \mathcal{A}_p eine gute Reduktion von \mathcal{A} für eine genügend große Primzahl p . Dann gilt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right) \\ &= p^n - \# \left(\bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right). \end{aligned}$$

Beweis. Für $X \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ gilt offenbar $\#X = p^{\dim(X)}$, wobei die Dimension von X wahlweise über \mathbb{Q} oder über \mathbb{F}_p berechnet werden kann. Wir wollen die Behauptung mit Möbius-Inversion in $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ zeigen, und definieren zwei Funktionen $f, g : \mathcal{L}(\mathcal{A}_p) \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(X) = \#X \quad \text{und} \quad g(X) = \# \left(X \setminus \bigcup_{Y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p): X \supseteq Y} Y \right).$$

Nach Definition gilt

$$f(X) = \sum_{Y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p): X \supseteq Y} g(Y),$$

sodass mit Möbius-Inversion folgt:

$$\begin{aligned} g(X) &= \sum_{Y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p): X \supseteq Y} \mu(X, Y) f(Y) \\ &= \sum_{X \supseteq Y} \mu(X, Y) p^{\dim(Y)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$g(\mathbb{F}_p^n) = \sum_{X \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)} \mu(\mathbb{F}_p^n, X) p^{\dim(X)} = \chi_{\mathcal{A}}(p).$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus der Annahme, dass $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ gilt. Zudem folgt aus der Definition von g , dass

$$g(\mathbb{F}_p^n) = \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right),$$

womit der Satz bewiesen ist. □

BEISPIEL 4.5

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{C}(n)}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{C}(n)} H \right) \\ &= p^n - \#\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i = 0 \text{ für geeignete } i\} \\ &= \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq 0 \text{ für } i \in [n]\}. \end{aligned}$$

Um ein Element aus dieser Menge zu bestimmen, haben wir für alle $i \in [n]$ genau $p - 1$ Möglichkeiten, um den Eintrag a_i zu wählen. Wir erhalten also

$$\chi_{\mathcal{C}(n)}(p) = (p - 1)^n,$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.33.

BEISPIEL 4.6

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{B}(n)}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{B}(n)} H \right) \\ &= p^n - \#\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i = a_j \text{ für geeignete } i, j\} \\ &= \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq b_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

Um ein Element aus dieser Menge zu bestimmen, bemerken wir, dass a_1 genau p Werte annehmen kann. Damit bleiben für a_2 noch $p - 1$ Möglichkeiten, für a_3 noch $p - 2$, und so weiter. Wir erhalten also

$$\chi_{\mathcal{B}(n)}(p) = p(p - 1)(p - 2) \cdots (p - n + 1)$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.34.

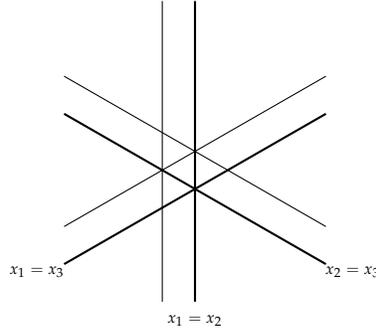


ABBILDUNG 20. Das Arrangement $\text{ess}(\text{Shi}(3))$. Hervorgehoben ist $\mathcal{B}(3)$.

BEISPIEL 4.7

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph, und sei \mathcal{A}_G das zugehörige graphische Arrangement. Das definierende Polynom von \mathcal{A}_G ist gerade

$$Q_{\mathcal{A}_G}(\vec{x}) = \prod_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j).$$

Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}_G}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}_G} H \right) \\ &= p^n - \#\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i = a_j \text{ für geeignete } \{i, j\} \in E\} \\ &= \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq b_j \text{ für alle } \{i, j\} \in E\} \\ &= \chi_G(p) \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit Satz 3.8.

BEISPIEL 4.8: [1, Theorem 3.3]

Sei nun $\text{Shi}(n)$ das **SHI-ARRANGEMENT** gegeben durch

$$\text{Shi}(n) = \{H_a(\vec{a}_{i,j}) \mid 1 \leq i < j \leq n, a \in \{0, 1\}\}.$$

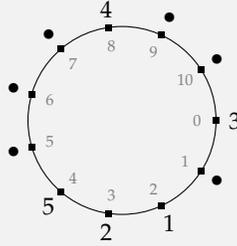
Abbildung 20 zeigt $\text{ess}(\text{Shi}(3))$. Offenbar ist $\#\text{Shi}(n) = n(n-1)$ und $\text{rk}(\text{Shi}(n)) = n-1$.

Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Shi}(n)}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \text{Shi}(n)} H \right) \\ &= p^n - \#\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i = a_j \text{ oder } a_i = a_j + 1 \text{ für geeignete } i, j\} \\ &= \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq b_j \text{ und } b_i \neq b_j + 1 \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

Sei nun (b_1, b_2, \dots, b_n) ein Element im Komplement von $\text{Shi}(n)$ über \mathbb{F}_p^n . Wir zeichnen zunächst die Elemente von \mathbb{F}_p im Uhrzeigersinn auf einem Kreis ein. Nun markieren wir, für alle $i \in [n]$, den Punkt b_i mit i , und markieren die übrigen Punkte mit \bullet . Nun schreiben wir die Zahlen zwischen zwei mit \bullet markierten Punkten als Menge auf (diese kann leer sein), und ordnen diese Mengen im Uhrzeigersinn ausgehend von der Menge die die 1 enthält an. Wir erhalten offenbar eine geordnete schwache Partition von $[n]$ mit $p - n$ Blöcken, also eine Familie $\{B_1, B_2, \dots, B_{p-n}\}$ mit $B_i \cap B_j = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{p-n} = [n]$, wobei einige der B_i auch leer sein können, und die Elemente von B_i linear geordnet sind. Sei umgekehrt $\mathbf{x} = \{B_1, B_2, \dots, B_{q-n}\}$ eine geordnete schwache Partition von $[n]$, und sei $x \in \mathbb{F}_p$. Sei $B_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ mit $y_1 = 1$. Wir markieren die Punkte $x + (i - 1)$ mit y_i für $i \in [r]$, und $x + r$ mit \bullet . Von $x + r + 1$ ausgehend wiederholen wir die Prozedur mit den übrigen Blöcken von \mathbf{x} . Dann erzeugen wir ein Tupel (b_1, b_2, \dots, b_n) , wobei b_i der mit i markierte Punkt sein soll. Offenbar ist $b_i \neq b_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$. Wenn es $i < j$ gäbe mit $b_i = b_j + 1$, dann wäre der mit j markierte Punkt im Uhrzeigersinn direkt vor dem mit i markierten Punkt. Da diese Punkte nicht mit einem \bullet getrennt werden, gehören sie zu einem Block B von \mathbf{x} . Da $i < j$ erhalten wir aber eine Widerspruch zur Annahme, dass B linear geordnet ist. Also ist $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \text{Shi}(n)} H$.

Betrachten wir $p = 11$ und $n = 5$, und wählen wir $(2, 3, 0, 8, 4)$. Wir erhalten das folgende Diagramm.



Aus diesem lesen wir die geordnete schwache Partition $\{\{1, 2, 5\}, \emptyset, \emptyset, \{4\}, \emptyset, \{3\}\}$ ab.

Wenn $\Pi_n^o(p - n)$ die Menge aller geordneten schwachen Partitionen von $[n]$ mit $p - n$ Blöcken bezeichnet, haben wir eben gezeigt, dass gilt:

$$\begin{aligned} \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq b_j \text{ und } b_i \neq b_j + 1 \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\} \\ = \#\{(\mathbf{x}, x) \mid \mathbf{x} \in \Pi_n^o(p - n), x \in \mathbb{F}_p\}. \end{aligned}$$

Um ein Element $\mathbf{x} \in \Pi_n^o(p - n)$ zu spezifizieren genügt es für jeden Wert $2 \leq i \leq n$ festzulegen, in welchem der $p - n$ Blöcke er liegt. (Nach Konstruktion ist 1 immer im ersten Block von \mathbf{x} .) Somit ist

$$\#\Pi_n^o(p - n) = (p - n)^{n-1}.$$

Fügen wir diese Überlegungen zusammen, erhalten wir

$$\chi_{\text{Shi}(n)}(p) = p(p - n)^{n-1}.$$

Mit Satz 1.51 folgt dann

$$\begin{aligned} r(\text{Shi}(n)) &= (n+1)^{n-1}, \\ b(\text{Shi}(n)) &= (n-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Das können wir in Abbildung 20 verifizieren, denn dort lesen wir $r(\text{Shi}(3)) = 16 = (3+1)^{3-1}$ und $b(\text{Shi}(3)) = 4 = (3-1)^{3-1}$ ab.

BEMERKUNG 4.9

Die Formel zur Berechnung der Anzahl der Kammern des Shi-Arrangements, $r(n) = (n+1)^{n-1}$, ist auch aus anderen Situationen bekannt. Beispielsweise zählt $r(n)$ auch die folgenden Objekte:

- beschriftete Bäume mit $n+1$ Knoten;
- Funktionen $f: [n-1] \rightarrow [n+1]$, sogenannte Prüfer-Codes;
- Einparkfunktionen der Länge n ;
- Faktorisierungen eines $n+1$ -Zyklus in n Transpositionen;
- Wälder von gewurzelten Bäumen mit $n+1$ Knoten;
- maximale Ketten im Verband der nichtkreuzenden Mengenpartitionen von $[n+1]$.

Eine interessante kombinatorische Frage ist es nun, explizite Bijektionen zwischen diesen Mengen anzugeben. Wir beschreiben kurz eine Bijektion zwischen den Kammern von $\text{Shi}(n)$ und den Einparkfunktionen der Länge n , die auf I. Pak und R. Stanley zurück geht. Eine Folge $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in [n]^n$ heißt **EINPARKFUNKTION**, wenn es eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ gibt, sodass $a_i \leq \sigma(i)$ für alle $i \in [n]$ gilt.

Ihren Namen erhalten Einparkfunktionen aus dem folgenden Szenario. Stellen wir uns eine Einbahnstraße mit n beschrifteten, linear angeordneten Parkplätzen vor. In diese Straße fahren nacheinander n Autos ein, wobei das i -te Auto den a_i -ten Parkplatz bevorzugt. Das i -te Auto fährt also bis zum a_i -ten Parkplatz vor und parkt ein wenn dieser frei ist. Ist der a_i -te Platz belegt, dann parkt das i -te Auto im nächsten freien Parkplatz ein. Eine solche Folge (a_1, a_2, \dots, a_n) von Parkpräferenzen ist genau dann erfolgreich (d.h. alle Autos können einparken), wenn es eine Einparkfunktion ist. Offenbar bleibt, egal welche Folge von Präferenzen wir festlegen, höchstens ein Auto ohne Parkgelegenheit.

Um Einparkfunktionen zu zählen bietet sich folgende Beweisidee von H. Pollack an. Modifizieren wir das Modell also so, dass wir $n+1$ Parkplätze zyklisch anordnen. Nun können alle Autos einparken, und es bleibt genau ein Platz frei. Die Einparkfunktionen entsprechen genau den Situationen, in denen der $n+1$ -te Platz frei bleibt. Offenbar gibt es $(n+1)^n$ Abbildungen von $[n]$ nach $[n+1]$, und die Menge dieser Anordnungen lässt sich in $n+1$ Rotationsklassen zerlegen. Dabei gibt es genau eine Anordnung pro Rotationsklasse, in welcher der $n+1$ -te Platz frei bleibt. Die Anzahl aller Einparkfunktionen der Länge n ist also $(n+1)^{n-1}$.

Sei nun $R_0 \in \mathcal{R}(\text{Shi}(n))$ die Kammer, deren Vektoren die Form (x_1, x_2, \dots, x_n) mit $x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_1 - 1$ haben. Wir setzen $\lambda(R_0) = (1, 1, \dots, 1)$. Nun nehmen wir an, dass wir ein $R \in \mathcal{R}(\text{Shi}(n))$ gefunden haben, für das $\lambda(R)$ bekannt ist. Wir wählen eine benachbarte Kammer $R' \in \mathcal{R}(\text{Shi}(n))$, d.h. R und R' werden von genau einer Hyperebene

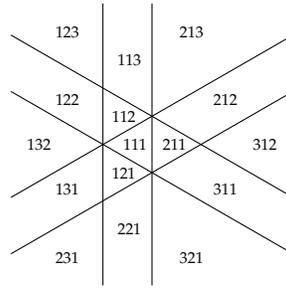


ABBILDUNG 21. Das Arrangement $\text{ess}(\text{Shi}(3))$, mit durch Einparkfunktionen beschrifteten Kammern.

H getrennt, und nehmen an, dass $\lambda(R')$ unbekannt ist, sowie dass R und R_0 im gleichen Halbraum von H liegen. Dann setzen wir

$$\lambda(R') = \begin{cases} \lambda(R) + \vec{e}_i, & H = H_0(\vec{\alpha}_{i,j}), \\ \lambda(R) + \vec{e}_j, & H = H_1(\vec{\alpha}_{i,j}). \end{cases}$$

Nun kann man zeigen, dass die Abbildung λ eine Bijektion von $\mathcal{R}(\text{Shi}(n))$ in die Menge aller Einparkfunktionen der Länge n ist. Abbildung 21 zeigt die Essentialisierung von $\text{Shi}(3)$, deren Kammern mit den Einparkfunktionen der Länge 3 beschriftet sind.

BEISPIEL 4.10: [1, Theorem 3.4]

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph mit $V = [n]$. Wir betrachten das **GRAPHISCHE SHI-ARRANGEMENT** gegeben durch

$$\text{Shi}_G(n) = \mathcal{B}(n) \uplus \{H_1(\vec{\alpha}_{i,j}) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ und } \{i, j\} \in E\}.$$

Insbesondere ist für den vollständigen Graphen $\text{Shi}_G(n) = \text{Shi}(n)$, und für den leeren Graphen $\text{Shi}_G(n) = \mathcal{B}(n)$.

Nehmen wir nun an, dass E die folgende Eigenschaft erfüllt.

- (3) Wenn $i < j$ und $\{i, j\} \in E$, dann ist auch $\{i, k\} \in E$ für alle $j < k \leq n$.

In diesem Fall können wir das charakteristische Polynom von $\text{Shi}_G(n)$ analog zu Beispiel 4.8 bestimmen. Sei dazu p eine genügend große Primzahl.

Wir tragen zuerst $p - n$ mal das Symbol \bullet auf einem Kreis ein. Jetzt setzen wir die Zahlen $1, 2, \dots, n$ in die entstehenden $p - n$ Lücken. Wir erhalten so ein Tupel $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n$, wobei b_i dem mit i markierten Punkt entspricht.

Die Zahl 1 können wir ohne Einschränkungen platzieren. Nehmen wir an, dass die Zahlen $1, 2, \dots, j - 1$ für $j \geq 2$ bereits platziert sind. Dann stehen für j prinzipiell $p - n + j - 1$ Plätze zur Verfügung. Allerdings dürfen wir j nicht direkt vor i platzieren, wenn die Kante $\{i, j\} \in E$ existiert. (Wenn wir das tun, steht in der fertigen Platzierung ein Wert $k \geq j$ direkt vor i , woraus $b_i - b_k = 1$ folgt. Nach Voraussetzung ist aber $\{i, k\} \in E$, also liegt das entsprechende Tupel nicht in $\mathbb{F}_p^n \setminus \text{Shi}_G(n)$.)

Wir definieren also

$$a_j = \#\{i \in [n] \mid i < j \text{ und } \{i, j\} \in E\}$$

und erhalten $p - n + j - 1 - a_j$ Möglichkeiten, die Zahl $j > 1$ zu platzieren. Es folgt

$$\chi_{\text{Shi}_G(n)}(p) = p \prod_{j=2}^n (p - n + j - 1 - a_j),$$

da wir p Möglichkeiten haben, um die 1 zu platzieren.

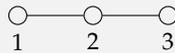
Sowohl der vollständige Graph, als auch der Graph ohne Kanten erfüllen (3). Im ersten Fall ist $a_j = j - 1$, im zweiten Fall ist $a_j = 0$. In diesen Spezialfällen erhalten wir genau die charakteristischen Polynome von $\text{Shi}(n)$ bzw. $\mathcal{B}(n)$.

Mit Satz 1.51 folgt dann

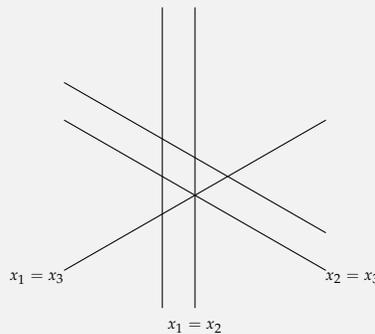
$$r(\text{Shi}_G(n)) = \prod_{j=2}^n (2 + n - j + a_j)$$

$$b(\text{Shi}_G(n)) = \prod_{j=2}^n (n - j + a_j).$$

Charakteristische Polynome von graphischen Shi-Arrangements, deren zugrundeliegende Graphen die Bedingung (3) nicht erfüllen, lassen sich im Allgemeinen nicht so schön faktorisieren. Betrachten wir beispielsweise den folgenden Pfad P :



Da die Kante $\{1, 2\}$ existiert, aber nicht $\{1, 3\}$, ist (3) verletzt. Die Essentialisierung des entsprechenden graphischen Shi-Arrangements sieht wie folgt aus.



Das entsprechende charakteristische Polynom ist

$$\chi_{\text{Shi}_P(n)}(t) = t^3 - 5t^2 + 7t = t(t^2 - 5t + 7),$$

welches über \mathbb{R} nicht in Linearfaktoren zerfällt.

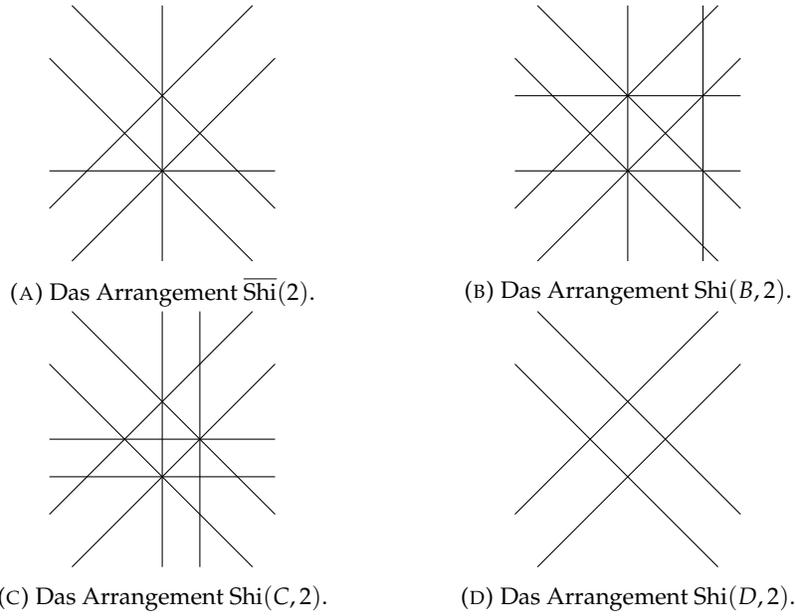


ABBILDUNG 22. Verallgemeinerte Shi-Arrangements.

BEISPIEL 4.11: [1, Theorem 3.10]

Betrachten wir das folgende Hyperebenenarrangement

$$\overline{\text{Shi}}(n) = \{H_a(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j) \mid 1 \leq i < j \leq n, a \in \{0, 1\}\} \cup \{H(\vec{e}_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Abbildung 22a zeigt $\overline{\text{Shi}}(2)$. Es ist $\#\overline{\text{Shi}}(n) = 2n^2 - n$ und $\text{rk}(\overline{\text{Shi}}(n)) = n$. Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\overline{\text{Shi}}(n)}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \overline{\text{Shi}}(n)} H \right) \\ &= p^n - \#\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i - a_j \in \{0, 1\} \text{ oder } a_i = 0 \text{ für geeignete } i, j\} \\ &= \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq 0 \text{ für } i \in [n] \text{ und } b_i - b_j \notin \{0, 1\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

Um ein solches Element (b_1, b_2, \dots, b_n) zu bestimmen, gehen wir wie folgt vor. Zunächst zeichnen wir wieder die Elemente von \mathbb{F}_p^n im Uhrzeigersinn auf einem Kreis ein, sodass 0 oben ist. Wir wollen nun die Elemente von $\pm[n] = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ auf diesem Kreis platzieren, unter der Bedingung, dass wenn der Punkt $b_i \in \mathbb{F}_p$ mit i beschriftet wird, dann wird $-b_i \in \mathbb{F}_p$ mit $-i$ beschriftet.

Die Bedingungen $b_i \neq 0$ verlangen, dass der Punkt 0 unbeschriftet bleibt, und die Bedingungen $b_i - b_j \neq 0$ verlangen, dass keine zwei Punkte mit dem gleichen Wert beschriftet werden. Die Bedingungen $b_i - b_j \neq 1$ verlangen, dass für alle $j \in [n]$ und alle $i < j$ weder

BEISPIEL 4.12: [1, Theorem 3.13]

Betrachten wir nun das **SHI-ARRANGEMENT VOM TYP B** gegeben durch

$$\text{Shi}(B, n) = \overline{\text{Shi}}(n) \cup \{H_1(\vec{e}_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

$\text{Shi}(B, 2)$ ist in Abbildung 22b dargestellt.

Wir verwenden das gleiche kombinatorische Modell wie in Beispiel 4.11. Die zusätzlichen Bedingungen $x_i \neq 1$ bedeuten, dass der Punkt 1 entweder frei bleibt, oder mit einem negativen Wert beschriftet wird. Wir erhalten also signierte, geordnete schwache Partitionen von $[n]$ mit $(p+1)/2 - n$ Blöcken, wobei der erste Block höchstens negative Werte enthält. Um $i \in [n]$ zu platzieren bleiben also $1 + 2((p-1)/2 - n) = p - 2n$ Möglichkeiten, und wir erhalten:

$$\chi_{\text{Shi}(B, n)}(p) = (p - 2n)^n.$$

Mit Satz 1.51 folgt dann

$$r(\text{Shi}(B, n)) = (2n + 1)^n,$$

$$b(\text{Shi}(B, n)) = (2n - 1)^n.$$

BEISPIEL 4.13: [1, Theorem 3.13]

Betrachten wir nun das **SHI-ARRANGEMENT VOM TYP C** gegeben durch

$$\text{Shi}(C, n) = \overline{\text{Shi}}(n) \cup \{H_1(2\vec{e}_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

$\text{Shi}(C, 2)$ ist in Abbildung 22c dargestellt.

Analog zu Beispiel 4.12 haben wir die zusätzlichen Bedingungen $2x_i \neq 1$. Das ist äquivalent zu $-x_i \neq (p-1)/2$. Also bleibt der Punkt $(p-1)/2$ entweder leer, oder wird mit einem positiven Wert beschriftet. Wir erhalten also signierte, geordnete schwache Partitionen von $[n]$ mit $(p+1)/2 - n$ Blöcken, wobei der letzte Block höchstens positive Werte enthält. Um $i \in [n]$ zu platzieren bleiben also $1 + 2((p-1)/2 - n) = p - 2n$ Möglichkeiten, und wir erhalten:

$$\chi_{\text{Shi}(C, n)}(p) = (p - 2n)^n.$$

Mit Satz 1.51 folgt dann

$$r(\text{Shi}(C, n)) = (2n + 1)^n,$$

$$b(\text{Shi}(C, n)) = (2n - 1)^n.$$

BEISPIEL 4.14: [1, Theorem 3.13]

Betrachten wir nun das **SHI-ARRANGEMENT VOM TYP D** gegeben durch

$$\text{Shi}(D, n) = \overline{\text{Shi}}(n) \setminus \{H(\vec{e}_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

$\text{Shi}(D, 2)$ ist in Abbildung 22d dargestellt.

Wir verwenden erneut das kombinatorische Modell aus Beispiel 4.11. Nun können wir aber ebenfalls die 0 beschriften. Wenn die 0 mit i beschriftet wird, dann folgt wegen $x_i = 0 = -x_i$, dass die 0 ebenfalls mit $-i$ beschriftet wird. Wir erhalten also signierte, geordnete schwache Partitionen von $[n]$ mit $(p+3)/2 - n$ Blöcken, wobei die Elemente im

ersten Block sowohl bzgl. des Vorzeichen, als auch bzgl. der Reihenfolge festgelegt sind. Um $i \in [n]$ zu platzieren, bleiben also $1 + 2((p+1)/2 - n) = p - 2n + 2$ Möglichkeiten, und wir erhalten:

$$\chi_{\text{Shi}(D,n)}(p) = (p - 2n + 2)^n.$$

Mit Satz 1.51 folgt dann

$$r(\text{Shi}(D,n)) = (2n - 1)^n,$$

$$b(\text{Shi}(D,n)) = (2n - 3)^n.$$

Die Arrangements $\text{Shi}(B,n)$ und $\text{Shi}(D,n)$ gehen auf gleiche Weise aus $\text{Shi}(n)$ hervor, wie die in der Übung betrachteten Arrangements $\text{Cox}(B,n)$ und $\text{Cox}(D,n)$ aus $\mathcal{B}(n)$ hervorgehen. (Siehe Ü23 und Ü24.) Insbesondere bezeichnet man $\mathcal{B}(n)$ auch als Coxeter-Arrangement vom Typ A , und $\text{Shi}(n)$ dementsprechend als Shi-Arrangement vom Typ A . Wir bemerken, dass $\text{Shi}(B,n)$ und $\text{Shi}(C,n)$ nicht-isomorph sind, während das Typ- C -Analogon des Coxeter-Arrangements isomorph zu $\text{Cox}(B,n)$ ist.

5. DIE KAMMERORDNUNG

In diesem Abschnitt wollen wir die Kammern von $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$ bzgl. ihrer Trennmenge von einer gegebenen Basiskammer partiell ordnen. Diese Idee geht auf [4] zurück. Wir wollen dabei ein paar strukturelle und enumerative Aspekte beleuchten, und folgen dabei im Wesentlichen [2] und [9].

5.1. Polyeder und Zellen.

DEFINITION 5.1

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **KEGEL**, wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in X$ auch $a\vec{x} + b\vec{y} \in X$ für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist.

Die Dimension eines Kegels X entspricht der Dimension des kleinsten Untervektorraums von \mathbb{R}^n , der X enthält.

Insbesondere sind Kegel konvexe Mengen. Wir bezeichnen mit $\text{cl}(X)$ den (topologischen) Abschluss von $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Das **RELATIVE INNERE** einer abgeschlossenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, bezeichnet mit $\text{relint}(X)$, ist das Innere von X bzgl. des kleinsten Untervektorraums von \mathbb{R}^n , der X enthält.

DEFINITION 5.2

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **POLYEDER**, wenn es ein Hyperebenenarrangement $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ gibt sodass

$$X = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} \text{cl}(H^-).$$

In dem Fall nennen wir \mathcal{A} eine **DARSTELLUNG** von X . Wenn für jedes $\mathcal{A}' \subsetneq \mathcal{A}$ gilt, dass

$$X \subsetneq \bigcap_{H \in \mathcal{A}'} \text{cl}(H^-),$$

dann ist \mathcal{A} eine nicht-redundante Darstellung.

Ein **POLYEDRISCHER KEGEL** ist dann ein Kegel der als Durchschnitt über endlich viele Halbräume entsteht.

DEFINITION 5.3

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder mit nicht-redundanter Darstellung \mathcal{A} . Die **FACETTEN** von X sind die Durchschnitte der Form $X \cap H$ für $H \in \mathcal{A}$. Eine **ZELLE** von X ist ein Durchschnitt von Facetten von X , und wir schreiben $\mathcal{F}(X)$ für die Menge aller Zellen von X .

Die Hyperebenen in \mathcal{A} heißen **BEGRENZENDE HYPEREBENEN** von X , und wir schreiben im allgemeinen $\text{Bound}(X)$ anstelle von \mathcal{A} .

Wir fassen dabei einen Polyeder als Zelle von sich selbst auf, der als Durchschnitt über die leere Menge entsteht.

5.2. Zellen von Arrangements. Wir betrachten von nun an bis auf Widerruf ein essentielles Arrangement $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_m\} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ mit $H_i = H_{a_i}(\vec{a}_i)$ für $i \in [m]$ gegeben. Wir erinnern uns, dass die Kammern von \mathcal{A} abgeschlossene Teilmengen des \mathbb{R}^n sind. Also sind sie allesamt Polyeder; und wenn \mathcal{A} linear ist, sogar polyedrische Kegel.

Eine Menge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **ZELLE** von \mathcal{A} , wenn es eine Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ gibt, sodass $F \in \mathcal{F}(R)$. Wir schreiben $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ für die Menge aller Zellen von \mathcal{A} . Sei nun $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$, und sei $\mathcal{A}_F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Bound}(F)$.

$\{H \in \mathcal{A} \mid F \subseteq H\}$. Wir definieren den charakteristischen Vektor $\text{char}(F) \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ von F vermöge

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \text{relint}(F) \subseteq H_i^+ \text{ oder } \text{relint}(F) \subseteq H_i, \\ -1, & \text{wenn } \text{relint}(F) \subseteq H_i^-. \end{cases}$$

Dann gilt

$$(4) \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle = a_i \text{ für } H_i \in \mathcal{A}_F \text{ und } \langle \varepsilon_j \vec{\alpha}_j, \vec{x} \rangle \geq \varepsilon_j a_j \text{ für } H_j \notin \mathcal{A}_F\}.$$

Das relative Innere von F lässt sich schreiben als:

$$(5) \quad \text{relint}(F) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle = a_i \text{ für } H_i \in \mathcal{A}_F \text{ und } \langle \varepsilon_j \vec{\alpha}_j, \vec{x} \rangle > \varepsilon_j a_j \text{ für } H_j \notin \mathcal{A}_F\}.$$

LEMMA 5.4

Seien $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $R \neq Q$. Wenn $\dim(R \cap Q) = n - 1$, dann ist $R \cap Q$ eine Facette von R und von Q .

Beweis. Sei zunächst $X = R \cap Q$ derart, dass $\dim(X) = n - 1$. Wir wählen $\vec{x} \in \text{relint}(X)$ derart, dass für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ der offene ε -Ball um \vec{x} die Menge X in einem $n - 1$ -dimensionalen Ball B schneidet. Nach Definition ist $\text{relint}(R) \cap \text{relint}(Q) = \emptyset$, sodass B zum Rand von R und zum Rand von Q gehört. Weiterhin werden $\text{relint}(R)$ und $\text{relint}(Q)$ von einer Hyperebene $H \in \mathcal{A}$ getrennt, und es gilt $B \subseteq H$. Also ist $H \in \text{Bound}(R) \cap \text{Bound}(Q)$.

Sei $F = R \cap H$. Es gibt keine von H verschiedene begrenzende Hyperebene von Q , die $\text{relint}(F)$ schneidet, also folgt $F \subseteq Q \cap H$. Analog folgt $Q \cap H \subseteq F$, und wir sind fertig. \square

KOROLLAR 5.5

Jede Facette von $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ ist Facette einer eindeutigen Kammer $Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \setminus \{R\}$.

Beweis. Sei F eine Facette von R , und sei $H \in \text{Bound}(R)$ mit $F \subseteq H$. Sei $\vec{x} \in \text{relint}(F)$. Für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ schneidet der offene ε -Ball B um \vec{x} keine Hyperebene in $\mathcal{A} \setminus \{H\}$. Dann schneidet H diesen Ball aber in zwei Teile, und einer davon ist vollständig in R enthalten. Der andere Teil ist in einer Kammer $Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ enthalten, und insbesondere hat $R \cap Q$ Dimension $n - 1$. Nach Lemma 5.4 besitzen R und Q eine gemeinsame Facette. Dann muss Q aber eindeutig sein, da es andernfalls zwei verschiedene Kammern geben müsste, deren relative Innere einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. \square

Wir nennen zwei Kammern $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ **BENACHBART**, wenn $\dim(R \cap Q) = n - 1$ gilt. Mit anderen Worten, zwei Kammern sind genau dann benachbart, wenn sie von einer gemeinsamen Facette getrennt werden.

LEMMA 5.6

Seien $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Dann existiert eine Folge von Kammern $Q = R_0, R_1, \dots, R_k = R$ derart, dass R_{i-1} und R_i für alle $i \in [k]$ benachbart sind, und dass beim Durchlaufen dieser Folge keine Hyperebene von \mathcal{A} mehr als einmal durchquert wird.

Beweis. Wähle $\vec{x} \in \text{relint}(Q)$, und sei Y die Menge aller Punkte $\vec{y} \in \text{relint}(R)$ mit der Eigenschaft, dass die Strecke von \vec{x} nach \vec{y} einen $n - 2$ -dimensionalen Unterraum $H \cap H'$ für $H, H' \in \mathcal{A}$ schneidet. Dann ist Y aber in der Vereinigung endlich vieler Hyperebenen im \mathbb{R}^n enthalten. (Diese Hyperebenen werden von \vec{x} und den entsprechenden Durchschnitten erzeugt.) Da $\dim(R) = n$ ist, ist $R \not\subseteq Y$.

Wählen wir also $\vec{y} \in \text{relint}(R) \setminus Y$. Wenn wir nun der Strecke von \vec{x} nach \vec{y} folgen, durchqueren wir zu jedem Zeitpunkt höchstens eine Hyperebene von \mathcal{A} . Also durchlaufen wir eine Folge $Q = R_0, R_1, \dots, R_k = R$ von benachbarten Kammern von \mathcal{A} . Diese Strecke ist nach Voraussetzung in keiner Hyperebene von \mathcal{A} enthalten, also schneidet sie jede Hyperebene von \mathcal{A} in höchstens einem Punkt. \square

5.3. Die Kammerordnung. Nun fixieren wir eine beliebige Kammer $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$(6) \quad B = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle > a_i, \text{ für } i \in [m] \}$$

annehmen. (Notfalls ersetzen wir $H_{a_i}(\vec{\alpha}_i)$ durch $H_{-a_i}(-\vec{\alpha}_i)$.)

DEFINITION 5.7

Für $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ definieren wir ihre **TRENNMENGE** vermöge

$$S(R; B) = \{ H_i \in \mathcal{A} \mid \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle < a_i \text{ für alle } \vec{x} \in \text{relint}(R) \}.$$

Mit anderen Worten enthält $S(R; B)$ alle Hyperebenen, die R und B trennen.

DEFINITION 5.8

Für $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ definieren wir $R \leq Q$ genau dann wenn $S(R; B) \subseteq S(Q; B)$ gilt. Die resultierende geordnete Menge

$$\text{Pos}(\mathcal{A}; B) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{R}(\mathcal{A}), \leq)$$

ist die **KAMMERORDNUNG** von \mathcal{A} bezüglich B .

Diese Ordnung ist wohldefiniert, da man zeigen kann, dass aus $S(R; B) = S(Q; B)$ stets $R = Q$ folgt.

BEISPIEL 5.9

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement in \mathbb{R}^3 , das in Abbildung 23 dargestellt ist. Diese Abbildung zeigt die stereographische Projektion des Durchschnitts von \mathcal{A} mit der Einheitskugel. (Insbesondere ist \mathcal{A} die Essentialisierung des graphischen Arrangements eines Kreises der Länge 4.)

Die Beschriftung der Kammern spiegelt zwei verschiedene Wahlen der Basiskammer B wider. Jede übrige Kammer ist mit ihrer entsprechenden Trennmenge beschriftet. Die Kammerordnung bzgl. der blauen Basiskammer B ist in Abbildung 24a dargestellt, die Kammerordnung bzgl. der schwarzen Basiskammer B' in Abbildung 24b.

Wir bemerken weiter, dass der Isomorphietyp der Kammerordnung entscheidend von der Wahl der Basiskammer abhängt. Nicht nur sind die beiden Kammerordnungen in Abbildung 24 nicht isomorph, sondern die Ordnung in Abbildung 24b ist ein Verband, die Ordnung in Abbildung 24a nicht.

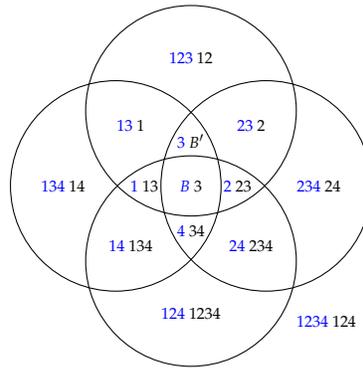


ABBILDUNG 23. Ein Hyperebenenarrangement in \mathbb{R}^3 .

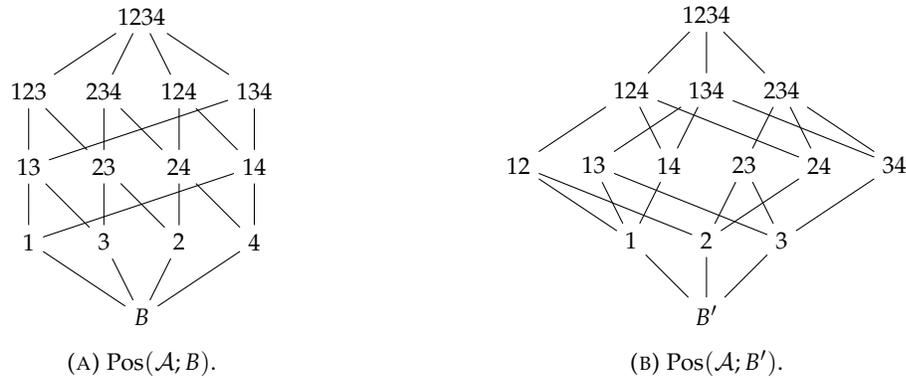


ABBILDUNG 24. Zwei Kammerordnungen des Arrangements \mathcal{A} aus Abbildung 23.

LEMMA 5.10

Sei \mathcal{A} linear. Für jedes $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ selbstdual. Insbesondere besitzt $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein größtes Element, und wenn $\#\mathcal{A} > 1$, dann ist die Anzahl maximaler Ketten von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ gerade.

Beweis. Für $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ ist auch $-R = \{\vec{x} \mid -\vec{x} \in R\} \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Weiterhin ist $S(-R; B) = \mathcal{A} \setminus S(R; B)$. Somit ist die Abbildung $R \mapsto -R$ der gewünschte Antiautomorphismus.

Dieser Antiautomorphismus ist offenbar selbstinvers und fixpunktfrei. Dementsprechend wird keine maximale Kette von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ von ihm fixiert. \square

LEMMA 5.11

Zwei Kammern $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ erfüllen genau dann $R \leq Q$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$, wenn R und Q benachbart sind und $\#S(R; B) < \#S(Q; B)$ gilt. In diesem Fall ist $S(Q; B) = S(R; B) \cup \{H\}$, wobei H die gemeinsame Facette von R und Q definiert.

Beweis. Sei zunächst $R < Q$. Nach Definition ist dann $S(R; B) \subsetneq S(Q; B)$, sodass wir $H \in S(Q; B) \setminus S(R; B)$ finden können. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $H \in \text{Bound}(R)$ ist. Nach Korollary 5.5 gibt es eine eindeutige Kammer $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, sodass $R \cap R' \subseteq H$ ist. Aus $H \notin S(R; B)$ folgt $H \in S(R'; B)$, und damit ist $R < R' \leq Q$. Nach Voraussetzung folgt $R' = Q$.

Seien umgekehrt $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ zwei benachbarte Kammern, und sei $\#S(R; B) < \#S(Q; B)$. Nach Lemma 5.4 gibt es eine Hyperebene H , die $R \cap Q$ enthält, und es ist $H \in \text{Bound}(R)$ und $H \in \text{Bound}(Q)$. Nach Annahme liegen B und R im gleichen Halbraum von H , und es folgt $S(Q; B) = S(R; B) \cup \{H\}$. Also ist $R < Q$. \square

KOROLLAR 5.12

Für jedes $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ gradiert, wobei der Rang von $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ durch $\#S(R; B)$ gegeben ist.

BEISPIEL 5.13

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. In Beispiel 1.47 haben wir die Kammern von $\mathcal{C}(n)$ mit Elementen aus $\{0, 1\}^n$ identifiziert. Sei B die Kammer, die mit $(0, 0, \dots, 0)$ identifiziert wird. Die Anzahl der Elemente vom Rang k in $\text{Pos}(\mathcal{C}(n); B)$ ist durch die Anzahl der n -Tupel mit genau k Einsen gegeben. Die entsprechende Kammerordnung ist isomorph zum Booleschen Verband der Ordnung n .

BEISPIEL 5.14

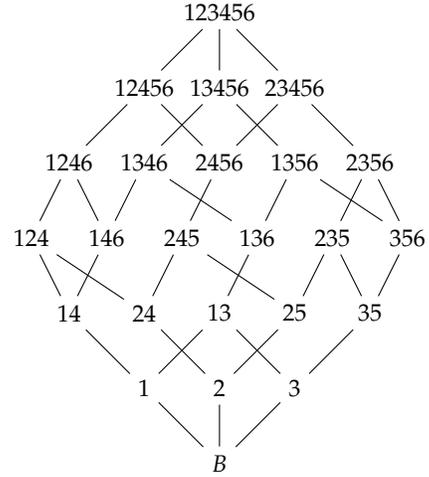
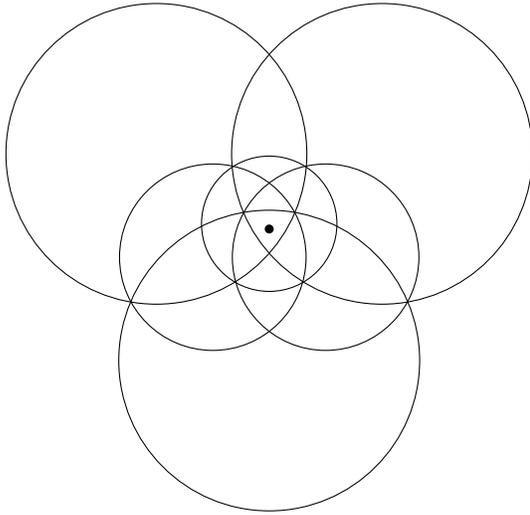
Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. In Beispiel 1.48 haben wir die Kammern von $\mathcal{B}(n)$ mit den Permutationen von $[n]$ identifiziert. Sei B die Kammer, deren Vektoren die Bedingungen $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ erfüllen. Die Anzahl der Elemente vom Rang k in $\text{Pos}(\mathcal{B}(n); B)$ ist durch die Anzahl der Permutationen mit genau k Inversionen gegeben. Abbildung 25a zeigt die stereographische Projektion von $\text{ess}(\mathcal{B}(4))$ geschnitten mit der Einheitssphäre, und Abbildung 25b zeigt die entsprechende Kammerordnung.

BEISPIEL 5.15

Sei $\text{Shi}(n)$ das Shi-Arrangement aus Beispiel 4.8. In Bemerkung 4.9 haben wir eine Bijektion zwischen $\mathcal{R}(\text{Shi}(n))$ und den Einparkfunktionen der Länge n beschrieben. Sei B die Kammer, die der Einparkfunktion $(1, 1, \dots, 1)$ entspricht. Dann ist die Anzahl der Elemente vom Rang k in $\text{Pos}(\text{Shi}(n); B)$ durch die Anzahl aller Einparkfunktionen (a_1, a_2, \dots, a_n) mit $k = n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ gegeben. Abbildung 26 zeigt $\text{Pos}(\text{Shi}(3); B)$.

LEMMA 5.16: [4, Lemma 2.1]

Sei $F \in \mathcal{F}(B)$ nicht-leer. Dann gibt es eine eindeutige Kammer $R_F \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $S(R_F; B) = \mathcal{A}_F$.



(A) Die stereographische Projektion der Essentialisierung des Zopf-Arrangements $\mathcal{B}(4)$.

(B) Die Kammerordnung $\text{Pos}(\mathcal{B}(4), B)$, wobei B die in Abbildung 25a markierte Kammer ist.

ABBILDUNG 25. Die Kammerordnung des Zopf-Arrangements $\mathcal{B}(3)$.

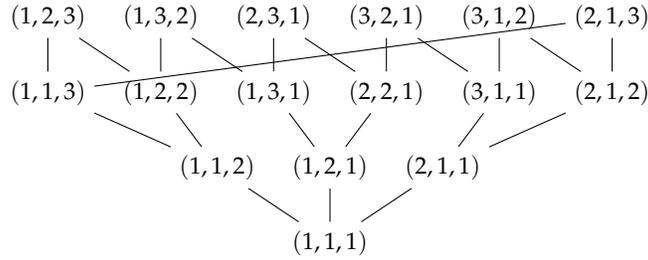


ABBILDUNG 26. $\text{Pos}(\text{Shi}(3); B)$.

Beweis. Sei $\vec{y} \in \text{relint}(F)$ und sei $\vec{x} \in B$, und sei $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$. Nach (6) gilt für alle $i \in [m]$

$$a_i < \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle + \langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} \rangle.$$

Nach (5) ist $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} \rangle = a_i$ falls $H_i \in \mathcal{A}_F$, also folgt aus obiger Ungleichung $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle > 0$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt weiter

$$\langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} - \varepsilon \vec{z} \rangle = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} \rangle - \varepsilon \langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle = a_i - \varepsilon \langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle < a_i$$

falls $H_i \in \mathcal{A}_F$. Nun wählen wir ε klein genug, sodass $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} - \varepsilon \vec{z} \rangle > a_i$ für alle $H_i \notin \mathcal{A}_F$. Sei nun R die Kammer, die $\vec{y} - \varepsilon \vec{z}$ enthält. Nach Definition ist $S(R; B) = \mathcal{A}_F$. Nach Konstruktion ist diese Kammer eindeutig, und wir schreiben R_F anstelle von R . \square

DEFINITION 5.17

Eine Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ heißt **ZELLULÄR**, wenn es ein $F \in \mathcal{F}(B)$ gibt, sodass $R = R_F$.

LEMMA 5.18

Die Abbildung $F \mapsto R_F$ ist eine injektive, ordnungsumkehrende Abbildung von $\mathcal{F}(B) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \text{Pos}(\mathcal{A}; B)$.

Beweis. Seien $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(B)$ mit $F_1 \subseteq F_2$. Dann ist $\mathcal{A}(F_1) \supseteq \mathcal{A}(F_2)$. Nach Lemma 5.16 gibt es eindeutige Kammern $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $S(R_1; B) = \mathcal{A}(F_1)$ und $S(R_2; B) = \mathcal{A}(F_2)$. Nach Definition folgt $R_1 \geq R_2$. \square

5.4. Zur Verbandseigenschaft von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, unter welchen Bedingungen die Kammerordnung einen Verband bildet.

LEMMA 5.19

Sei $F \in \mathcal{F}(B) \setminus \{\emptyset\}$, und sei $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Wenn $\text{Bound}(F) \subseteq S(R; B)$ ist, dann folgt $R_F \leq R$.

Beweis. Sei $F \in \mathcal{F}(B) \setminus \{\emptyset\}$. Wir definieren die Menge $\text{Bound}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Bound}(B) \cap \mathcal{A}_F$. Nach Lemma 5.16 ist $S(R_F; B) = \mathcal{A}_F$. Sei also $H \in \mathcal{A}_F$. Es bleibt zu zeigen, dass $H \in S(R; B)$.

(i) Sei $H \in \text{Bound}(F)$. Nach Voraussetzung folgt $H \in S(R; B)$.

(ii) Sei $H \notin \text{Bound}(F)$. Nach Definition folgt dann $H \in \mathcal{A}_F \setminus \text{Bound}(B)$. Sei $H = H_t$ für ein $t \in [m]$. Da $F \neq \emptyset$ gibt es $\vec{y} \in F$ sodass $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} \rangle = a_i$ für alle $H_i \in \text{Bound}(B)$, sowie $\langle \vec{\alpha}_t, \vec{y} \rangle = a_t$.

Da $H_t \in \mathcal{A}_F$ keine begrenzende Hyperebene von B ist, folgt für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$(7) \quad \text{Wenn } \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle > a_i \text{ für alle } H_i \in \text{Bound}(F) \text{ gilt, dann gilt auch } \langle \vec{\alpha}_t, \vec{x} \rangle > a_t.$$

(Da $H_t \cap \text{relint}(B) = \emptyset$ und $F \subseteq H_t$.)

Sei nun $\vec{z} \in R$. Wenn $H_t \notin S(R; B)$ ist, dann gilt $\langle \vec{\alpha}_t, \vec{z} \rangle > a_t$. Nach Voraussetzung ist $\text{Bound}(F) \subseteq S(R; B)$, also gilt $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle < a_i$ für alle $H_i \in \text{Bound}(F)$. Dementsprechend ist

$$\langle \vec{\alpha}_i, 2\vec{y} - \vec{z} \rangle = 2a_i - \langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle > a_i$$

für alle $H_i \in \text{Bound}(F)$. Da $H_t \notin \text{Bound}(B)$ folgt mit (7) der Widerspruch

$$a_t < \langle \vec{\alpha}_t, 2\vec{y} - \vec{z} \rangle = 2a_t - \langle \vec{\alpha}_t, \vec{z} \rangle < a_t.$$

Also ist $H = H_t \in S(R; B)$. \square

DEFINITION 5.20

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener polyedrischer Kegel mit $\dim(X) = n$. Wenn X genau n Facetten besitzt, heißt X **SIMPLIZIAL**.

Wir können simpliziale Kegel auch äquivalent als Durchschnitte von geschlossenen Halbräumen definieren, wobei die Normalenvektoren der definierenden Hyperebenen eine Basis des \mathbb{R}^n bilden.

Im allgemeinen gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Zellen eines abgeschlossenen polyedrischen Kegels als Durchschnitt von Facetten darzustellen. Wenn der Kegel aber simplizial ist, sind diese Darstellungen eindeutig und es gibt genau $\binom{n}{k}$ Zellen der Dimension k .

DEFINITION 5.21

Ein lineares Hyperebenenarrangement heißt **SIMPLIZIAL**, wenn jede Kammer simplizial ist.

LEMMA 5.22: [4, Lemma 2.3]

Sei \mathcal{A} linear, und sei B simplizial. Für jede nicht-leere Teilmenge A der Atome von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ gibt es eine Zelle $F \in \mathcal{F}(B)$, sodass R_F die kleinste obere Schranke von A ist.

Beweis. Sei A eine nicht-leere Teilmenge der Atome von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$. Für $Q \in A$ ist $S(Q; B) = \{H\}$. Da B simplizial ist, ist $\#\mathcal{F}(B) = 2^n$, und damit ist der Durchschnitt über die Trennmengen der Elemente von A eine eindeutig festgelegte Zelle $F \in \mathcal{F}(B)$.

Sei $Q \in A$. Dann gilt mit Lemma 5.16, dass

$$S(Q; B) \subseteq \bigcup_{R \in A} S(R; B) = \text{Bound}(F) \subseteq \mathcal{A}_F = S(R_F; B).$$

Also ist $Q \leq R_F$, und R_F ist damit eine obere Schranke von A . Mit Lemma 5.19 folgt, dass R_F sogar die kleinste obere Schranke von A . \square

SATZ 5.23: [2, Theorem 3.1]

Sei \mathcal{A} linear. Wenn $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Verband ist, dann ist B simplizial.

Beweis. Für $H \in \mathcal{A}$ schreiben wir $\vec{\alpha}_H$ für den entsprechenden Normalenvektor. (Mit anderen Worten, wenn $H = H_i$, dann ist $\vec{\alpha}_i = \vec{\alpha}_H$.)

Nehmen wir an, dass B nicht simplizial ist. Dann ist $\#\text{Bound}(B) \geq n + 1$. Also ist die Menge Z aller Normalenvektoren der Hyperebenen in $\text{Bound}(B)$ linear abhängig, und wir bezeichnen mit D eine minimale linear abhängige Teilmenge von Z . Sei nun $\vec{z} \in D$. Dann gilt

$$(8) \quad \vec{z} = - \sum_{G \in U} c_G \vec{\alpha}_G + \sum_{H \in V} d_H \vec{\alpha}_H.$$

Dabei ist $D = \{\vec{z}\} \uplus \{\vec{\alpha}_G \mid G \in U\} \uplus \{\vec{\alpha}_H \mid H \in V\}$ und die Koeffizienten c_G und d_H sind alle nicht-negativ.

Wenn $V = \emptyset$ ist, dann folgt $\langle \vec{z}, \vec{x} \rangle < 0$ für alle $\vec{x} \in B$. Nach Definition gibt es $H_{\vec{z}} \in \text{Bound}(B)$ mit $\vec{z} = \vec{\alpha}_{H_{\vec{z}}}$. Das ist ein Widerspruch zu (6), also folgt $V \neq \emptyset$.

Sei nun $X = \{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid B \triangleleft R \text{ und } S(R; B) \subseteq V\}$. Da $D \setminus \{\vec{z}\}$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren ist, ist das Arrangement $U \uplus V \subseteq \mathcal{A}$ kombinatorisch isomorph zu einem Koordinatenarrangement. Dementsprechend enthält

$$\left(\bigcap_{G \in U} G^- \right) \cup \left(\bigcap_{H \in V} H^+ \right)$$

eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Also gibt es eine Kammer $T \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $V \subseteq S(T; B)$ und $S(T; B) \cap U = \emptyset$, und wir wählen T minimal (bzgl. dieser Eigenschaften) in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$.

Da $V \subseteq S(T; B)$ ist, ist T eine obere Schranke von X . Für $\vec{y} \in T$ folgt $\langle \vec{\alpha}_H, \vec{y} \rangle > 0$ für $H \in V$ und $\langle \vec{\alpha}_G, \vec{y} \rangle < 0$ für $G \in U$. Dementsprechend ist $\langle \vec{z}, \vec{y} \rangle > 0$, also ist $H_{\vec{z}} \in S(T; B)$. Sei $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $S(R; B) = \{H_{\vec{z}}\}$. Nach Lemma 5.10 ist $S(-R; B) = \mathcal{A} \setminus \{H_{\vec{z}}\}$, also ist $-R$ ebenfalls eine obere

Schranke von X . Allerdings sind T und $-R$ unvergleichbar in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$. Da T minimal gewählt war, ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ also kein Verband. \square

Bevor wir fortfahren, beweisen wir das folgende allgemeine Hilfslemma.

LEMMA 5.24: [2, Lemma 2.1]

Sei $\mathcal{P} = (P, \leq)$ eine endliche beschränkte Halbordnung. Wenn für je zwei Elemente $x, y \in P$, die ein gemeinsames Element $z \in P$ bedecken, das Supremum $x \vee y$ existiert, dann ist \mathcal{P} bereits ein Verband.

Beweis. Nach Übung Ü1 genügt es zu zeigen, dass je zwei Elemente in P ein Supremum besitzen.

Sei n die größte Länge einer maximalen Kette in \mathcal{P} . Wir verwenden Induktion nach n . Für $n \leq 2$ ist die Aussage trivialerweise wahr. Sei nun also $n > 2$ beliebig, und seien $x, y \in P$ so gewählt, dass sie kein gemeinsames Element bedecken. Seien a und b Atome von \mathcal{P} mit $a \leq x$ und $b \leq y$. Wenn $a = b$, dann existiert $x \vee y$ nach Induktionsvoraussetzung.

Wenn $a \neq b$, dann existiert das Supremum $a \vee b$ nach Voraussetzung, da $\hat{0} \leq a$ und $\hat{0} \leq b$. Nach Induktionsvoraussetzung (angewendet auf $[a, \hat{1}]$) existiert $x \vee (a \vee b)$. Nach Induktionsvoraussetzung (angewendet auf $[b, \hat{1}]$) existiert auch $x \vee (a \vee b) \vee y = z$. Da $a \leq x$ und $b \leq y$ ist $z = x \vee y$. \square

SATZ 5.25: [2, Theorem 3.2]

Sei \mathcal{A} linear mit $\dim \mathcal{A} \leq 3$. Wenn B simplizial ist, dann ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Verband.

Beweis. Sei $n = \dim \mathcal{A}$. Für $n \leq 2$ ist die Behauptung trivialerweise wahr. Sei also $n = 3$. Da B simplizial ist, folgt nach Lemma 5.22, dass jede Teilmenge der Atome von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Supremum besitzt. Nach Lemma 5.24 genügt es zu zeigen, dass für jedes Atom R_0 von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ das Intervall $[R_0, -B]$ ein Verband ist.

Sei also R_0 ein beliebiges Atom von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ und sei $S(R_0; B) = \{H_0\}$. Es bezeichne $\vec{\alpha}_{H_0}$ den Normalenvektor von H_0 in \mathcal{A} . Sei $H_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{\alpha}_{H_0}, \vec{x} \rangle = -1\}$ und sei $\mathcal{A}_1 = \{H \cap H_1 \mid H \in \mathcal{A}\}$ das von H_1 induzierte, affine zweidimensionale Arrangement. Dann ist

$$[R_0, -B] \cong \text{Pos}(\mathcal{A}_1; R_0 \cap H_1)$$

vermöge des Isomorphismus $R \mapsto R \cap H_1$. Nach Konstruktion ist $\text{Pos}(\mathcal{A}_1; R_0 \cap H_1)$ beschränkt, und besitzt ein planares Ordnungsdiagramm. Insbesondere ist $\text{Pos}(\mathcal{A}_1; R_0 \cap H_1)$ also ein Verband. \square

BEISPIEL 5.26: [2, Example 3.3]

Wir betrachten das vierdimensionale Arrangement $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}, & H_2 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}, \\ H_3 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}, & H_4 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \\ H_5 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 - x_4 = 0\}, & H_6 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Wir wählen die simpliziale Basiskammer

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > x_4 > 0\},$$

und wählen das Atom R von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ mit $S(R; B) = \{H_6\}$. Es gilt

$$R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > x_4, x_4 < 0, x_1 + 2x_2 + x_3 > 0, 2x_1 + x_2 + x_3 > 0\}.$$

Sei nun $\tilde{H} = \{x_4 = -1\}$ und $\tilde{\mathcal{A}} = \{H_i \cap \tilde{H} \mid i \in [5]\}$. Dann ist $\dim \tilde{\mathcal{A}} = 3$, und es ist gegeben durch die Hyperebenen

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}, & \tilde{H}_2 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}, \\ \tilde{H}_3 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}, & \tilde{H}_4 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \\ \tilde{H}_5 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -1\}. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Satz 5.25 ist $[R, -B]$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ isomorph zu $\text{Pos}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{R})$, wobei $\tilde{R} = R \cap \tilde{H}$ ist.

Offenbar ist $-\tilde{B} = -B \cap \tilde{H}$ das größte Element von $\text{Pos}(\tilde{\mathcal{A}}; \tilde{R})$. Es gilt

$$-\tilde{B} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 < -1\}.$$

Wir finden ein Koatom \tilde{T} in $\text{Pos}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{R})$ gegeben durch

$$\tilde{T} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 > -1, x_1 + 2x_2 + x_3 < 0, 2x_1 + x_2 + x_3 < 0\};$$

insbesondere ist $S(\tilde{T}; \tilde{R}) = \tilde{\mathcal{A}} \setminus \{\tilde{H}_5\}$. Das Intervall $[\tilde{R}, \tilde{T}]$ besteht aus allen Kammern von $\tilde{\mathcal{A}}$, die im positiven Halbraum \tilde{H}_5^+ liegen. Sei $\mathcal{A}' = \tilde{\mathcal{A}} \setminus \{\tilde{H}_5\}$, und sei R' die eindeutige Kammer von \mathcal{A}' , die \tilde{R} enthält. Es gilt

$$R' = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + 2x_2 + x_3 > 0, 2x_1 + x_2 + x_3 > 0\},$$

und R' ist somit nicht simplizial. Weiterhin ist \mathcal{A}' ein zentrales dreidimensionales Arrangement, und es gilt $[\tilde{R}, \tilde{T}] \cong \text{Pos}(\mathcal{A}'; R')$. Nach Satz 5.25 ist $\text{Pos}(\mathcal{A}'; R')$ kein Verband (es ist sogar isomorph zur Kammerordnung aus Abbildung 24a). Da es ein zu $\text{Pos}(\mathcal{A}'; R')$ isomorphes Intervall in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ gibt, ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ kein Verband.

SATZ 5.27: [2, Theorem 3.4]

Wenn \mathcal{A} simplizial ist, dann ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Verband für jede Wahl von B .

Beweis. Nach Lemma 5.22 existiert das Supremum für jedes Paar von Atomen von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$.

Seien nun $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, die eine gemeinsame Kammer R bedecken. Wir zeigen zunächst, dass das Supremum $R_1 \vee R_2$ existiert. Nach Konstruktion ist das Intervall $[R, -B]$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ isomorph zum Intervall $[R, -B]$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; R)$. In $\text{Pos}(\mathcal{A}; R)$ bedecken R_1 und R_2 ebenfalls R . Da R simplizial ist, existiert nach Lemma 5.22 also $R_1 \vee R_2$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; R)$ und gehört zum Intervall $[R, -B]$. Also existiert $R_1 \vee R_2$ auch in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$.

Mit Lemma 5.24 folgt, dass $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Verband ist. \square

5.5. Dichte Arrangements und Semidistributive Verbände. Sei $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ und sei F eine Facette von R . Nach Korollar 5.5 existiert eine eindeutige Kammer $Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $F = R \cap Q$. Nach Lemma 5.11 gilt entweder $R \triangleleft Q$ oder $Q \triangleleft R$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$. Wir nennen F eine **OBERE FACETTE**

von R bzgl. B , wenn $R \triangleleft Q$ gilt, und eine **UNTERE FACETTE** andernfalls. Eine **OBERE HYPEREBENE** von R bzgl. B ist eine Hyperebene, die eine obere Facette von R enthält. Wir definieren **UNTERE HYPEREBENEN** analog.

DEFINITION 5.28

Eine Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ heißt **DICHT** bzgl. B wenn sich je zwei obere Facetten von B in einer $n - 2$ -dimensionalen Zelle von R schneiden, und dasselbe auch für untere Facetten gilt.
Dann heißt \mathcal{A} **DICHT** bzgl. B , wenn alle Kammern von \mathcal{A} dicht bzgl. B sind.

Wenn \mathcal{A} linear ist, dann ist die Abbildung $R \mapsto -R$ nach Lemma 5.10 ein Antiautomorphismus von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$. Um zu prüfen, ob \mathcal{A} dicht bzgl. B ist genügt es also entweder alle Paare von oberen Facetten der Kammern von \mathcal{A} zu überprüfen, oder aber alle Paare von unteren Facetten.

BEISPIEL 5.29

Sei G der folgende Graph.

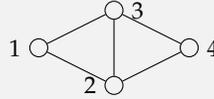


Abbildung 27a zeigt die stereographische Projektion von $\text{ess}(\mathcal{A}_G)$. Wir können schnell nachprüfen, dass \mathcal{A} dicht bzgl. B_1 , aber nicht bzgl. B_2 und B_3 ist.

Im weiteren Verlauf machen wir oft Gebrauch von dem folgenden Lemma und seiner Schlussfolgerungen.

LEMMA 5.30

Sei \mathcal{A} linear mit Basiskammer B , und sei $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ mit $\dim(F) = n - 2$. Sei $\mathcal{A}_F = \{H \in \mathcal{A} \mid F \subseteq H\}$, und sei B' die Kammer von \mathcal{A}_F , die B enthält. Die Einschränkung von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ auf $\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid F \subseteq R\}$ ist isomorph zu $\text{Pos}(\mathcal{A}_F; B')$.

Beweis. Sei R eine beliebige Kammer von \mathcal{A} , die F enthält. Dann gibt es zwei Facetten F_1, F_2 von R mit $F = F_1 \cap F_2$. Seien H_1 bzw. H_2 die begrenzenden Hyperebenen von R die F_1 bzw. F_2 enthalten. Dann ist $U = H_1 \cap H_2$ die lineare Hülle von F , und es gibt einen zweidimensionalen Unterraum P , sodass $\mathbb{R}^n = U \oplus P$. Sei $\vec{x} \in \text{relint}(F)$.

(i) Wir zeigen zuerst, dass

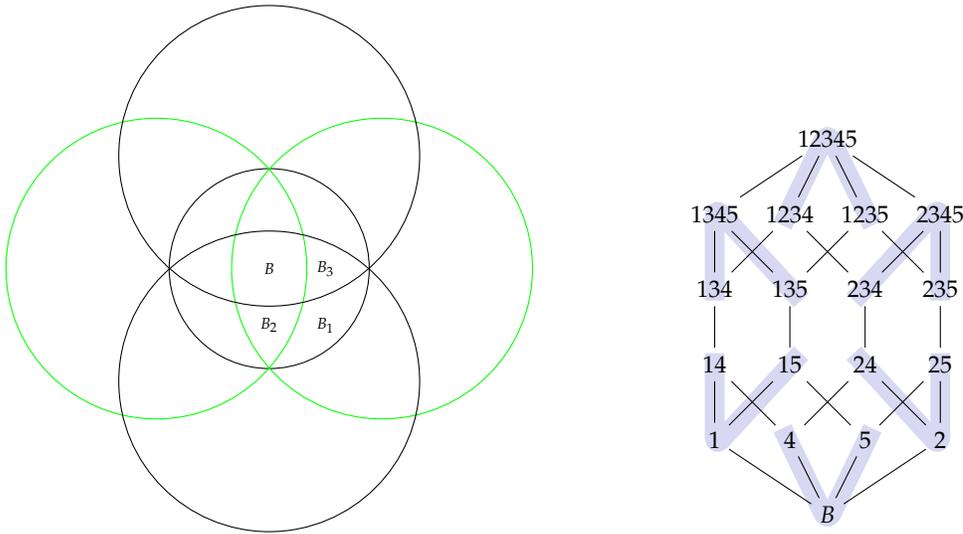
$$\mathcal{A}_F = \{H \in \mathcal{A} \mid \vec{x} \in H\}$$

gilt. Da $\vec{x} \in F$ ist eine Inklusion offensichtlich. Nehmen wir nun an, dass es eine Hyperebene $H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_F$ gibt mit $\vec{x} \in H$. Da $H \notin \mathcal{A}_F$ folgt, dass $U \not\subseteq H$. Also ist $P \subseteq H$.

Sei nun $\vec{y} \in \text{relint}(R)$ nah genug bei \vec{x} . Wir können einen Vektor in U von \vec{y} abziehen und erhalten $\vec{y}' = \vec{x} + \vec{p}$ für $\vec{p} \in P$. Nach Konstruktion ist, wenn \vec{y} nah genug bei \vec{x} gewählt wurde, $\vec{y}' \in \text{relint}(R)$. Nach Annahme ist aber auch $\vec{y}' \in P \subseteq H$. Wir erhalten somit den Widerspruch $H \cap \text{relint}(R) \neq \emptyset$.

(ii) Wir zeigen nun, dass

$$\{R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid F \subseteq R'\} = \{R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid \vec{x} \in R'\}$$



(A) Die stereographische Projektion der Essentialisierung des graphischen Arrangements aus Beispiel 5.29.

(B) Die Kammerordnung des Arrangements aus Abbildung 27a bzgl. der markierten Basiskammer.

ABBILDUNG 27. Die Kammerordnung eines Hyperebenenarrangements bzgl. einer nicht-dichten Kammer.

gilt. Da $\vec{x} \in F$ ist eine Inklusion offensichtlich. Sei also $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ so gewählt, dass $\vec{x} \in R'$, aber $F \not\subseteq R'$. Dann gibt es einen Punkt $\vec{x}' \in \text{relint}(F)$, sodass \vec{x} und \vec{x}' in verschiedenen Halbräumen bzgl. einer begrenzenden Hyperebene H von R' liegen. Da F ein Kegel ist, schneidet die Strecke von \vec{x} nach \vec{x}' die Hyperebene H in einem Punkt H'' , der ebenfalls in $\text{relint}(F)$ liegt. Aber dann gilt $\vec{x}'' \in H$ und $F \not\subseteq H$, was (i) widerspricht.

(iii) Wir wählen nun einen ε -Ball X um \vec{x} . Aus (ii) folgt, dass für ein genügend kleines ε

$$\{R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid R' \cap X \neq \emptyset\} = \{R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid F \subseteq R'\}$$

gilt. Nach (i) unterscheiden sich die Trennmengen solcher Kammern nur um Elemente in \mathcal{A}_F . Also sind diese Kammern in Bijektion mit den Kammern von \mathcal{A}_F vermöge der kanonischen Inklusionsabbildung. \square

Aus dem Beweis von Lemma 5.30 erhalten wir die folgenden Korollare.

KOROLLAR 5.31

Sei \mathcal{A} linear mit Basiskammer B , und sei $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ mit $\dim(F) = n - 2$. Weiter seien \mathcal{A}_F und B' wie in Lemma 5.30. Dann besteht $\text{Pos}(\mathcal{A}_F; B')$ aus genau zwei maximalen Ketten, die sich nur in B' und $-B'$ schneiden.

KOROLLAR 5.32

Sei \mathcal{A} linear mit Basiskammer B , und sei $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ mit $\dim(F) = n - 2$. Weiter seien \mathcal{A}_F und B' wie in Lemma 5.30. Dann gibt es eine (bis auf Umkehrung) eindeutige lineare Anordnung H_1, H_2, \dots, H_k der Hyperebenen in \mathcal{A}_F sodass für jede Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ die Menge $S(R; B) \cap \mathcal{A}_F$ entweder von der Form $\{H_1, H_2, \dots, H_i\}$ für $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$ oder von der Form $\{H_i, H_{i+1}, \dots, H_k\}$ für $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ist. Bezüglich dieser Anordnung sind H_1 und H_k die begrenzenden Hyperebenen von B' .

Beweis. Die Anordnung der Hyperebenen folgt direkt aus Korollar 5.31, ebenso der Fakt, dass H_1 und H_k die begrenzenden Hyperebenen von B' sind.

Sei nun $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, und sei R' die eindeutige Kammer von \mathcal{A}_F mit $R \subseteq R'$. Nach Konstruktion ist $S(R'; B') = S(R; B) \cap \mathcal{A}_F$, und $S(R'; B')$ besitzt die gewünschte Form. \square

KOROLLAR 5.33

Sei \mathcal{A} linear mit Basiskammer B , und sei $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ mit $\dim(F) = n - 2$. Weiter seien \mathcal{A}_F und B' wie in Lemma 5.30. Dann gibt es eine kleinste Kammer Q und eine größte Kammer R von \mathcal{A} , die F enthalten, und es gilt $S(Q; B) \cap \mathcal{A}_F = \emptyset$ sowie $S(R; B) = S(Q; B) \cup \mathcal{A}_F$.

Man kann sich leicht überlegen, dass \mathcal{A} nur dicht bzgl. simplizialer Kammern sein kann. Nach Satz 5.23 folgt aus der Verbandseigenschaft von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$, dass B simplizial ist. Wir haben auch die folgende, passende Implikation.

SATZ 5.34: [9, Theorem 9-3.2]

Wenn \mathcal{A} dicht bzgl. B ist, dann ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Verband.

Beweis. Seien $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ derart, dass ein $Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ existiert mit $Q \triangleleft R_1$ und $Q \triangleleft R_2$. Sei $F_1 = R_1 \cap Q$ und $F_2 = R_2 \cap Q$. Dann sind F_1 und F_2 obere Facetten von Q , also ist nach Voraussetzung $\dim(F_1 \cap F_2) = n - 2$. Seien H_1 bzw. H_2 die Hyperebenen, die F_1 bzw. F_2 enthalten.

Sei $\mathcal{A}_{F_1 \cap F_2} = \{H \in \mathcal{A} \mid F_1 \cap F_2 \subseteq H\}$ und sei B' die Kammer von $\mathcal{A}_{F_1 \cap F_2}$, die B enthält. Man kann sich nun überlegen, dass eine Kammer P mit der Eigenschaft, dass $\{H_1, H_2\} \subseteq S(P; B)$ sofort $\mathcal{A}_{F_1 \cap F_2} \subseteq S(P; B)$ erfüllt. Insbesondere enthält die Trennmengung jeder gemeinsamen oberen Schranke von R_1 und R_2 die Menge $S(Q; B) \cup \mathcal{A}_{F_1 \cap F_2}$.

Nach Lemma 5.30 ist die Menge aller Kammern, die $F_1 \cap F_2$ enthalten ein Intervall $[Q, R]$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$, und nach Korollar 5.33 ist $S(R; B) = S(Q; B) \cup \mathcal{A}'$. Also ist R das Supremum von R_1 und R_2 .

Nach Lemma 5.24 ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Verband. \square

BEISPIEL 5.35

Sei \mathcal{A} das Arrangement aus Beispiel 5.9. Es ist bzgl. der simplizialen Basiskammer B' nicht dicht, aber $\text{Pos}(\mathcal{A}; B')$ ist dennoch ein Verband.

LEMMA 5.36

Ein simpliziales Arrangement ist dicht bzgl. jeder Kammer.

Beweis. Das folgt daraus, dass sich je zwei Facetten einer simplizialen Kammer in einer $n - 2$ -dimensionalen Zelle schneiden. \square

Die Bedeutsamkeit des Dichtheitsbegriffs erscheint zunächst vielleicht etwas diffus. Dieser Begriff erlaubt aber eine Charakterisierung der Kammerordnungen, die *semidistributive* Verbände sind.

DEFINITION 5.37

Ein Verband $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ist **INFIMUM-SEMIDISTRIBUTIV**, wenn für alle $x, y, z \in L$ gilt

$$\text{Aus } x \wedge y = x \wedge z \text{ folgt } x \wedge (y \vee z) = x \wedge z.$$

Wenn sowohl \mathcal{L} , als auch der duale Verband \mathcal{L}^* , infimum-semidistributiv sind, dann ist \mathcal{L} **SEMIDISTRIBUTIV**.

BEISPIEL 5.38

Der Verband in Abbildung 24b ist nicht infimum-semidistributiv, da die Elemente $x = 34$, $y = 13$ und $z = 23$ die Bedingung verletzen. Die Verbände in den Abbildungen 25 und 28a sind allerdings semidistributiv.

SATZ 5.39: [9, Theorem 9-3.8]

Die Kammerordnung $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ist genau dann ein semidistributiver Verband, wenn \mathcal{A} dicht bzgl. B ist.

Um Satz 5.39 zu beweisen, benötigen wir die folgenden Lemmas.

LEMMA 5.40

Wenn eine Kammer R genau zwei untere Facetten bzgl. B besitzt, dann ist deren Durchschnitt $n - 2$ -dimensional.

Beweis. Seien F und G die beiden unteren Facetten von R bzgl. B . Seien weiter $\vec{x} \in \text{relint}(F)$, $\vec{y} \in \text{relint}(G)$ und sei $\vec{z} \in \text{relint}(B)$. Seien H_F bzw. H_G die begrenzenden Hyperebenen von R , die F bzw. G enthalten. Es ist $\vec{x} \in H_F \setminus H_G$ und $\vec{y} \in H_G \setminus H_F$.

Aus (6) folgt, dass für genügend kleine ε die Punkte $\vec{x}' = \vec{x} - \varepsilon\vec{z}$ und $\vec{y}' = \vec{y} - \varepsilon\vec{z}$ im relativen Inneren von R liegen. Da R konvex ist, ist auch die Strecke zwischen \vec{x}' und \vec{y}' in R enthalten.

Für $\vec{u} \in \text{relint}(R)$ sei $p(\vec{u})$ der Schnittpunkt von $\{\vec{u} + \lambda\vec{z} \mid \lambda \geq 0\}$ (also der Strecke von \vec{u} durch \vec{z}) mit dem Rand von R . Aus (6) folgt weiter, dass $p(\vec{u})$ in mindestens einer unteren Facette von R liegt, aber niemals in einer oberen Facette von R . Es gilt außerdem, dass $p(\vec{x}') = \vec{x}$ und $p(\vec{y}') = \vec{y}$.

Da R nur zwei untere Facetten besitzt gibt es einen Punkt \vec{u}' auf der Strecke von \vec{x}' nach \vec{y}' , für den $p(\vec{u}')$ in $H_F \cap H_G$ liegt. Da $\vec{u}' \in \text{relint}(R)$ gibt es einen offenen Ball um \vec{u}' der komplett in R liegt. Dieser Ball wird vermöge p auf eine relativ offene Umgebung U von $p(\vec{u}')$ im Rand von R abgebildet. Außerdem ist $U \subseteq F \cup G$. Also ist $U \cap H_F \cap H_G$ eine offene Umgebung von $p(\vec{u}')$ in $H_F \cap H_G \cap R$. Es folgt, dass die Dimension von $F \cap G = H_F \cap H_G \cap R$ gerade $n - 2$ ist. \square

LEMMA 5.41

Sei $X \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$, und sei R eine obere Schranke von X in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$. Es ist R genau dann eine minimale obere Schranke von X , wenn es für jede untere Hyperebene H von R bzgl. B ein $Q \in X$ gibt, sodass $H \in S(Q; B)$.

Beweis. Sei H eine untere Hyperebene von R sodass $H \notin \bigcup_{Q \in X} S(Q; B)$ gilt. Nach Lemma 5.11 gibt es $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $R' \triangleleft R$ und $S(R'; B) = S(R; B) \setminus \{H\}$. Dann ist R' aber auch eine obere Schranke von X , und R ist demnach keine minimale obere Schranke von X .

Nehmen wir umgekehrt an, dass für jede untere Hyperebene H von R ein $Q \in X$ existiert, sodass $H \in S(Q; B)$. Nach Lemma 5.11 ist kein unterer Nachbar von R eine obere Schranke von X . Also ist R eine minimale obere Schranke von X . \square

Nun beschreiben wir ein lokales Kriterium, wann ein Verband semidistributiv ist.

LEMMA 5.42: [9, Lemma 9-2.6]

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein endlicher Verband. Nehmen wir an, dass für alle $x, y, z \in L$ mit $x \wedge y = x \wedge z$ gilt, dass wenn y und z ein gemeinsames Element bedecken, dann ist $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y$. Dann ist \mathcal{L} semidistributiv.

Beweis. Seien $x, y, z \in L$ mit $x \wedge y = x \wedge z$. Wenn $y \leq z$ oder $z \leq y$, dann ist sofort klar, dass $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y$ gilt. Seien y und z also unvergleichbar in \mathcal{L} . Wir verwenden Induktion über $\#\{u \in L \mid y \wedge z \leq u\}$. Der Induktionsanfang (nämlich, dass y, z Koatome von \mathcal{L} sind, die ein gemeinsames Element bedecken) gilt nach Voraussetzung.

Seien a_y, a_z die Elemente, die $y \wedge z$ bedecken und $a_y \leq y$ und $a_z \leq z$ erfüllen. Wenn $a_y = a_z$, dann ist $a_y = y \wedge z$, was der Wahl von a_y widerspricht. Also ist $a_y \neq a_z$.

Aus $a_y \leq y$ folgt, dass $x \wedge a_y \leq x \wedge y$. Nach Annahme ist $x \wedge y = x \wedge z \leq z$. Also ist $x \wedge y \leq y \wedge z \leq a_y$. Es folgt $x \wedge y \leq x \wedge a_y \leq x \wedge y$. Analog zeigt man $x \wedge z = x \wedge a_z$, also ist nach Annahme $x \wedge a_y = x \wedge a_z$.

Da a_y und a_z ein gemeinsames Element (nämlich $y \wedge z$) bedecken, gilt nach Voraussetzung

$$x \wedge (a_y \vee a_z) = x \wedge a_y = x \wedge y.$$

Da $a_y \leq y$ und $a_y \leq a_y \vee a_z$, und $y \wedge z \leq a_y$ folgt per Induktion:

$$x \wedge (y \vee a_y \vee a_z) = x \wedge y = x \wedge z,$$

Weiter ist $a_z \leq y \vee a_y \vee a_z$, $a_z \leq z$ und $y \wedge z \leq a_z$, also folgt per Induktion:

$$x \wedge z = x \wedge (y \vee a_y \vee a_z \vee z) = x \wedge (y \vee z).$$

\square

Kommen wir nun zum Beweis von Satz 5.39.

Beweis von Satz 5.39. Sei \mathcal{A} dicht bzgl. B . Nach Satz 5.34 ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Verband. Es genügt also die Voraussetzung von Lemma 5.42 nachzuweisen.

Seien dazu $W, X, Y, Z \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $X \wedge Y = X \wedge Z$ und $W \triangleleft Y$ und $W \triangleleft Z$. Sei $R = X \wedge Y = X \wedge Z$. Es folgt, dass R eine untere Schranke von Y und Z ist, also gilt $R \leq Y \wedge Z = W$. Es bleibt zu zeigen, dass $X \wedge (Y \vee Z) = R$ gilt.

Sei $F_Y = Y \cap W$ und $F_Z = Z \cap W$, und seien H_Y bzw. H_Z die Hyperebenen, die Y bzw. Z enthalten. Dann gilt $S(Y; B) = S(W; B) \cup \{H_Y\}$ und $S(Z; B) = S(W; B) \cup \{H_Z\}$. Da \mathcal{A} dicht bzgl. B ist, ist $\dim(F_Y \cap F_Z) = n - 2$. Sei $\mathcal{A}' = \{H \in \mathcal{A} \mid F_Y \cap F_Z \subseteq H\}$. Lemma 5.30 impliziert, dass $S(Y \vee Z; B) = S(W; B) \cup \mathcal{A}'$ und dass $S(W; B) \cap \mathcal{A}' = \emptyset$. Da $R \leq W$ ist, gilt auch $S(R; B) \cap \mathcal{A}' = \emptyset$.

Sei nun $R' = X \wedge (Y \vee Z)$. Es gilt auf jeden Fall, dass $R \leq R'$, und wir nehmen an, dass sogar $R < R'$ gilt. Dann gibt es eine Kammer $T \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $R < T \leq R'$. Aus $T \leq R'$ folgt $T \leq X$, und da $T \not\leq R$ muss $T \not\leq Y$ gelten. Sei H die Hyperebene, die R und T trennt; also für die gilt $S(T; B) = S(R; B) \cup \{H\}$. Aus $T \leq R' \leq Y \vee Z$ folgt aber $H \in S(W; B) \cup \mathcal{A}'$. Da $T \not\leq Y$ folgt $H \notin S(W; B)$, also ist $H \in \mathcal{A}'$. Mit dem gleichen Argument folgt $H \neq H_Y$. Analog zeigt man $H \neq H_Z$. Also ist $H \in \mathcal{A}' \setminus \{H_Y, H_Z\}$. Nun widerspricht $S(T; B)$ aber Korollar 5.32, also folgt $R = R'$.

Nach Lemmas 5.10 und 5.42 ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ semidistributiv.

Nehmen wir nun an, dass \mathcal{A} nicht dicht bzgl. B ist. Wenn $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ kein Verband ist, sind wir fertig. Nehmen wir also an, dass $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Verband ist. Da \mathcal{A} nicht dicht bzgl. B ist, gibt es eine Kammer $W \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, die zwei obere Facetten besitzt deren Durchschnitt Dimension $< n - 2$ hat. Seien Y und Z die Kammern, die durch diese Facetten von W getrennt werden, und seien H_Y und H_Z die entsprechenden Hyperebenen. Sei $R = Y \vee Z$.

Nun betrachten wir die geordnete Menge $\text{Pos}(\mathcal{A}; W)$. Dort ist R nicht notwendigerweise das Supremum von Y und Z , aber in jedem Fall eine minimale obere Schranke von Y und Z . Es gilt $S(Y; W) = \{H_Y\}$ und $S(Z; W) = \{H_Z\}$. Sei C_R die Menge aller unteren Hyperebenen von R bzgl. W . Aus Lemma 5.41 folgt $C_R \subseteq \{H_Y, H_Z\}$. Wenn $C_R = \emptyset$, dann erhalten wir den Widerspruch $R = W$. Wenn $\#C_R = 1$, dann gibt es ein eindeutiges Element $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ mit $R' < R$. Dann ist aber R' eine obere Schranke von Y und Z , was der Minimalität von R widerspricht. Also ist $C_R = \{H_Y, H_Z\}$.

Nach Lemma 5.11 gibt es also genau zwei Kammern Q_Y und Q_Z , die von R bedeckt werden, und es gilt $S(R; W) = S(Q_Y; W) \cup \{H_Y\}$ und $S(R; W) = S(Q_Z; W) \cup \{H_Z\}$. Aus Lemma 5.40 folgt, dass $F = (R \cap Q_Y) \cap (R \cap Q_Z)$ Dimension $n - 2$ hat. Aus Korollar 5.33 folgt dann, dass $Q_Y \wedge Q_Z = X$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; W)$ existiert. Es sei $\mathcal{A}' = \{H \in \mathcal{A} \mid H_Y \cap H_Z \subseteq H\}$. Nach Korollar 5.33 gilt $S(X; W) = S(R; W) \setminus \mathcal{A}'$ und $S(R; W) = S(X; W) \cup \mathcal{A}'$. Insbesondere ist $\{H_Y, H_Z\} \cap S(X; W) = \emptyset$, und damit $X \wedge Y = W = X \wedge Z$.

Wenn $X = W$ ist, dann folgt aus Lemma 5.30, dass alle Kammern im Intervall $[X, R]$ die Facette F enthalten, also insbesondere auch Y, Z und W . Das widerspricht aber der Annahme, dass $\dim((Y \cap W) \cap (Z \cap W)) < n - 2$. Also ist $X \neq W$.

Nun betrachten wir das Intervall $[X, R]$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$. Dort gilt ebenfalls $X \wedge Y = W = X \wedge Z$. Dann folgt aber $X \wedge (Y \vee Z) = X \wedge R = X \neq W = X \wedge Y$. Also ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ nicht infimum-semidistributiv, und demnach auch nicht semidistributiv. \square

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem folgenden Korollar.

KOROLLAR 5.43

Sei \mathcal{A} linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ist ein semidistributiver Verband für alle $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.
- (ii) $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ist ein Verband für alle $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.
- (iii) \mathcal{A} ist simplizial.

Beweis. Die Implikation (i) \implies (ii) ist trivial. Die Implikation (ii) \implies (iii) folgt aus Satz 5.23. Die Implikation (iii) \implies (i) folgt aus Lemma 5.36 und Satz 5.39. \square

5.6. Überauflösbare Arrangements. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass überauflösbare Arrangements bestimmte Kammern besitzen, sodass die zugehörige Kammerordnung einen Verband bildet. Zunächst benötigen wir aber die folgende Charakterisierung solcher Arrangements.

SATZ 5.44: [2, Theorem 4.3]

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ linear. Wenn $\text{rk}(\mathcal{A}) \leq 2$, dann ist \mathcal{A} überauflösbar. Wenn $\text{rk}(\mathcal{A}) = n \geq 3$ ist, dann ist \mathcal{A} genau dann überauflösbar, wenn es eine Partition $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$ gibt, sodass \mathcal{A}_0 überauflösbar mit $\text{rk}(\mathcal{A}_0) = n - 1$ ist, und es für je zwei verschiedene $H', H'' \in \mathcal{A}_1$ ein $H \in \mathcal{A}_0$ gibt, sodass $H' \cap H'' \subseteq H$ gilt.

Beweis. Die erste Behauptung folgt, da jeder geometrische Verband vom Rang 2 überauflösbar ist.

Sei nun \mathcal{A} überauflösbar, und sei $\mathbb{R}^n = S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_n = \{\vec{0}\}$ die ausgezeichnete modulare Kette von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Definiere $\mathcal{A}_0 = \{H \in \mathcal{A} \mid S_{n-1} \subseteq H\}$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$. Nach Übung Ü8 ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}_0)$ überauflösbar. Für je zwei Hyperebenen $H', H'' \in \mathcal{A}_1$ gilt $S_{n-1} \vee H' = \{\vec{0}\}$ und $S_{n-1} \vee H'' = \{\vec{0}\}$. Also ist insbesondere $S_{n-1} \vee (H' \vee H'') = \{\vec{0}\}$, und da S_{n-1} modular ist, folgt dass $H = S_{n-1} \wedge (H' \vee H'')$ ein Atom von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ist. Da $H \supseteq S_{n-1}$ ist $H \in \mathcal{A}_0$, und da $H \supseteq H' \wedge H''$ folgt $H \supseteq H' \cap H''$ wie gewünscht.

Sei umgekehrt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$ wie angegeben. Sei $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_{n-1}$ eine modulare Kette in $\mathcal{L}(\mathcal{A}_0)$. Es genügt zu zeigen, dass S_{n-1} modular in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ist. Die Modularität von S_0, S_1, \dots, S_{n-2} folgt dann mit Lemma 2.8. Wir wählen also $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{L}(\mathcal{A}_0)$. Wir schreiben $Z = \bigcap_{i=1}^s G_i$, wobei G_i Hyperebenen von \mathcal{A} sind, und die Anzahl der verwendeten Hyperebenen aus \mathcal{A}_1 minimal sein soll. Seien nun $H', H'' \in \mathcal{A}_1$ zwei verschiedene Hyperebenen. Nach Annahme gibt es $H \in \mathcal{A}_0$ mit $H' \cap H'' \subseteq H$. Nach Lemma 2.7 sind H, H', H'' modular, und es folgt, dass $\text{rk}(H \cap H') = 2 = \text{rk}(H' \cap H'')$. Es folgt, dass $H \cap H' = H' \cap H''$. Aufgrund der Minimalität der verwendeten Hyperebenen aus \mathcal{A}_1 erhalten wir $Z = Z_0 \cap H'$, wobei $Z_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_0)$, sowie $H' \in \mathcal{A}_1$ und $H' \not\supseteq Z_0$. Mit der Semimodularität von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ folgt $\text{rk}(Z_0) = \text{rk}(Z) - 1$. Da $Z_0 \supseteq S_{n-1}$ gilt, folgt weiter $S_{n-1} \wedge Z = Z_0$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \text{rk}(S_{n-1} \vee Z) + \text{rk}(S_{n-1} \wedge Z) &= n + \text{rk}(Z_0) \\ &= \text{rk}(S_{n-1}) + 1 + \text{rk}(Z) - 1 \\ &= \text{rk}(S_{n-1}) + \text{rk}(Z). \end{aligned}$$

Also ist S_{n-1} modular. \square

In Satz 2.13 haben wir bestimmte Invarianten eines überauflösbaren Verbandes kennengelernt; die Exponenten. Die **EXPONENTEN** eines überauflösbaren Hyperebenenarrangements \mathcal{A} sollen dann die Exponenten von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ sein. Mit Satz 5.44 können wir die Exponenten e_1, e_2, \dots, e_n von \mathcal{A} rekursiv bestimmen. Und zwar entsprechen e_1, e_2, \dots, e_{n-1} den Exponenten von \mathcal{A}_0 und $e_n = \#\mathcal{A}_1$.

Aus Satz 5.44 erhalten wir eine kanonische Abbildung $\pi : \mathcal{R}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{A}_0)$, nämlich Inklusion von Kammern. Mehr noch, diese Abbildung ist offenbar surjektiv und ordnungserhaltend als Abbildung $\pi : \text{Pos}(\mathcal{A}, B) \rightarrow \text{Pos}(\mathcal{A}_0, \pi(B))$. Für $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ definieren wir

$$\text{Fib}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(\pi(R)).$$

DEFINITION 5.45

Sei \mathcal{A} überauflösbar, und sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$ wie in Satz 5.44. Eine Kammer R von \mathcal{A} heißt **KANONISCH** wenn entweder $\text{rk}(\mathcal{A}) \leq 2$, oder wenn $\pi(R)$ kanonisch in \mathcal{A}_0 ist, und $\text{Fib}(R)$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}, R)$ linear angeordnet ist.

BEISPIEL 5.46

Sei G erneut der Graph aus Beispiel 5.29. Offenbar ist G trianguliert, also ist das graphische Arrangement \mathcal{A}_G nach Satz 3.21 überauflösbar. Die Exponenten von \mathcal{A}_G sind $e_1 = 1, e_2 = e_3 = 2$. Es ist

$$\mathcal{A}_G = \{H(\vec{\alpha}_{1,2}), H(\vec{\alpha}_{1,3}), H(\vec{\alpha}_{2,3}), H(\vec{\alpha}_{2,4}), H(\vec{\alpha}_{3,4})\}.$$

Eine Zerlegung von \mathcal{A}_G aus Satz 5.44 ist $\mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$, wobei

$$\mathcal{A}_0 = \{H(\vec{\alpha}_{1,2}), H(\vec{\alpha}_{1,3}), H(\vec{\alpha}_{2,3})\},$$

$$\mathcal{A}_1 = \{H(\vec{\alpha}_{2,4}), H(\vec{\alpha}_{3,4})\}.$$

Abbildung 27a zeigt die stereographische Projektion von $\text{ess}(\mathcal{A}_G)$, wobei die Hyperebenen aus $\text{ess}(\mathcal{A}_0)$ in schwarz dargestellt sind, und die Hyperebenen aus $\text{ess}(\mathcal{A}_1)$ in grün. Die Kammerordnung von \mathcal{A}_G bzgl. der in Abbildung 27a markierten Kammer

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 < x_1 < x_3, x_2 < x_4 < x_3\}$$

ist in Abbildung 27b dargestellt. Die Fasern bzgl. π sind markiert. Da $\text{Fib}(B)$ keine Kette ist, ist B nicht kanonisch.

Man kann sich überlegen, dass jede kanonische Kammer simplizial ist. Wir haben die folgende Umkehrung von Satz 5.23

SATZ 5.47: [2, Theorem 4.6]

Sei \mathcal{A} überauflösbar, und sei $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ kanonisch. Dann ist $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ein Verband.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$ wie in Satz 5.44. Wir verwenden Induktion über $\text{rk}(\mathcal{A})$. Falls $\text{rk}(\mathcal{A}) = 2$ ist nach Definition jede Kammer kanonisch, und jede Kammerordnung ein Verband. Also gilt der Induktionsanfang.

Nach Definition ist $\pi(B)$ kanonisch in \mathcal{A}_0 , also ist $\text{Pos}(\mathcal{A}_0; \pi(B))$ nach Induktionsvoraussetzung ein Verband.

Da B kanonisch ist, bildet $\text{Fib}(B)$ eine Kette der Länge $\#\mathcal{A}_1$ in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$. Insbesondere erhalten wir daher eine lineare Ordnung \prec_R der Hyperebenen von \mathcal{A}_1 bzgl. $\text{Fib}(B)$. Wenn nämlich $\text{Fib}(B) = \{R_1, R_2, \dots, R_s\}$ ist, wobei $R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_s$ seien, dann gilt $H_i = S(R_{i+1}; B) \setminus S(R_i; B)$ für $i \in [s-1]$, und $\mathcal{A}_1 = \{H_1, H_2, \dots, H_{s-1}\}$. Wir setzen dann $H_i \prec_R H_j$ wenn $i < j$.

Seien $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ und sei $T \in \pi^{-1}(\pi(R_1) \vee \pi(R_2))$ minimal in $\text{Fib}(\pi(R_1) \vee \pi(R_2))$ mit der Eigenschaft, dass $R_1 \leq T$ und $R_2 \leq T$. (So ein Element existiert, da das größte Element von $\text{Fib}(\pi(R_1) \vee \pi(R_2))$ eine obere Schranke von R_1 und R_2 ist.) Also ist T eine minimale obere Schranke von R_1 und R_2 .

Sei T' eine andere minimale obere Schranke von R_1 und R_2 . Es folgt sofort, dass $T \not\leq T'$, also gibt es eine Hyperebene $H' \in \mathcal{A}_1$ mit $H' \in S(T; B) \setminus S(T'; B)$. Weiter folgt $\pi(T) \neq \pi(T')$, und da $\pi(T) = \pi(R_1) \vee \pi(R_2)$ ist, und π ordnungserhaltend ist, folgt $\pi(T) < \pi(T')$.

Da $T \not\leq T'$ ist, kann demnach T auch nicht minimal in $\text{Fib}(T)$ sein. Sei also $H \in \mathcal{A}_1$ die Hyperebene, die T von ihrem unteren Nachbarn in $\text{Fib}(T)$ trennt. Nach Konstruktion ist $H' \preceq_T H$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgt aus der Minimalität von T , dass $H \in S(R_1; B)$ liegt. Weiterhin ist $H' \notin S(T'; B)$ und damit auch $H' \notin S(R_1; B)$; es folgt, dass $H \prec_{R_1} H'$. Insbesondere ist $H \neq H'$.

Da $H \in S(R_1; B)$ liegt, folgt zwangsläufig $H \in S(T'; B)$, aber da $H' \notin S(T'; B)$, folgt $H \prec_{T'} H'$.

Sei nun H_0 die, nach Satz 5.44, eindeutige Hyperebene in \mathcal{A}_0 , die $H \cap H'$ enthält. Wenn $H_0 \in S(T; B)$ ist, dann folgt $H_0 \notin S(R_1; B)$ und $H_0 \notin S(T'; B)$. Wenn $H_0 \notin S(T; B)$ ist, dann folgt $H_0 \in S(R_1; B)$ und $H_0 \in S(T; B)$. Das widerspricht aber der Annahme $\pi(R_1) \leq \pi(T) < \pi(T')$. Also ist T die einzige minimale obere Schranke von R_1 und R_2 , sodass gilt $T = R_1 \vee R_2$. \square

5.7. Die Rangerzeugende Funktion. Wir haben in Korollar 5.12 gesehen, dass $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ gradiert ist. Wir definieren

$$w_k \stackrel{\text{def}}{=} \#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid \#S(R; B) = k\}.$$

Dann beschreibt w_k die Anzahl der Elemente vom Rang k in $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$.

DEFINITION 5.48

Wir definieren die **RANGERZUEGENDE FUNKTION** von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ durch

$$\rho_{\mathcal{A}; B}(q) = \sum_{k \geq 0} w_k q^k.$$

Es gilt offenbar $\rho_{\mathcal{A}; B}(1) = \#\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

BEISPIEL 5.49

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. In Beispiel 5.13 haben wir gesehen, dass $\text{Pos}(\mathcal{C}(n); B)$ für jede Wahl einer Basiskammer isomorph zum Booleschen Verband der Ordnung n ist. Also ist

$$\rho_{\mathcal{C}(n); B}(q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k = (q+1)^n.$$

BEISPIEL 5.50

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.6, und sei B die Kammer, deren Vektoren die Bedingung $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ erfüllen. Nach Beispiel 5.14 entspricht w_k der Anzahl der Permutationen mit genau k Inversionen. Also ist

$$\rho_{\mathcal{B}(n); B}(q) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} w_k q^k = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + q + \dots + q^i).$$

Die letzte Gleichheit ist möglicherweise etwas überraschend. Wir werden später eine schöne Erklärung dafür finden.

BEISPIEL 5.51

Sei \mathcal{A} das dreidimensionale Arrangement aus Beispiel 5.9, und seien B und B' die beiden Basiskammern. Wir lesen direkt aus Abbildung 24 ab, dass gilt:

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{A};B}(q) &= 1 + 4q + 4q^2 + 4q^3 + q^4, \\ \rho_{\mathcal{A};B'}(q) &= 1 + 3q + 6q^2 + 3q^3 + q^4.\end{aligned}$$

Für überauflösbare Arrangements lässt sich die rangerzeugende Funktion schön faktorisieren.

SATZ 5.52: [2, Theorem 4.4]

Sei \mathcal{A} überauflösbar mit Exponenten e_1, e_2, \dots, e_n , und sei $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ kanonisch. Die rangerzeugende Funktion von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ ist

$$\rho_{\mathcal{A};B}(q) = \prod_{i=1}^n (1 + q + q^2 + \dots + q^{e_i}).$$

Beweis. Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$ wie in Satz 5.44, und sei $\pi : \mathcal{R}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{A}_0)$ die kanonische Projektion. Wir bemerken zuerst, dass für jede Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ die Menge $\text{Fib}(R)$ einen Pfad im Adjazenzgraph von $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ bildet. Wenn B also kanonisch ist, ist $\text{Fib}(R)$ eine Kette der Länge e_n für alle $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Sei rk die Rangfunktion von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ und rk_0 die Rangfunktion von $\text{Pos}(\mathcal{A}_0; \pi(B))$. Es bezeichne h die Rangfunktion der Kette $\text{Fib}(R)$. Für $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ gilt also $\text{rk}(R) = \text{rk}_0(\pi(R)) + h(R)$. Mittels vollständiger Induktion folgt

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{A};B}(q) &= \rho_{\mathcal{A}_0; \pi(B)}(q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{e_n}) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + q + q^2 + \dots + q^{e_i}).\end{aligned}$$

□

BEISPIEL 5.53

Betrachten wir erneut das graphische Arrangement \mathcal{A}_G aus Beispiel 5.29. Es gibt, bis auf Isomorphie, drei Kammerordnungen von \mathcal{A}_G . Eine davon ist in Abbildung 27b abgebildet, die übrigen beiden in Abbildung 28. Die jeweiligen Basiskammern sind

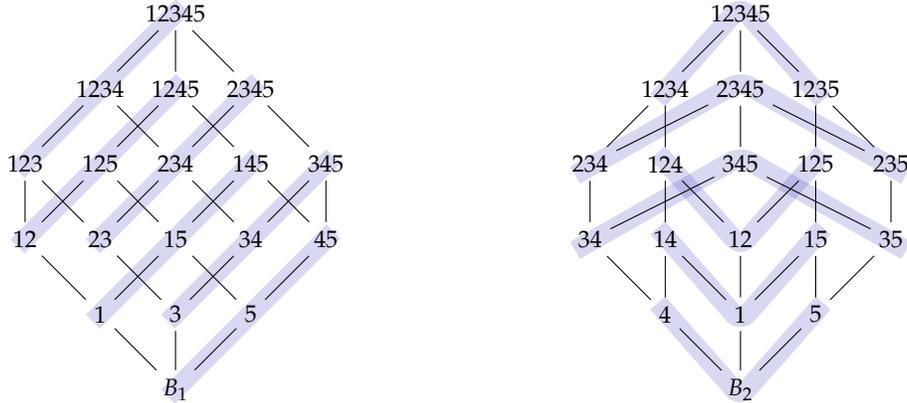
$$\begin{aligned}B_1 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}, \\ B_2 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 < x_2 < x_4 < x_3\}.\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass beide Kammern simplizial sind, aber nur B_1 ist kanonisch. Dennoch gilt

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{A}_G; B_1}(q) &= (1 + q)(1 + q + q^2)^2 = 1 + 3q + 5q^2 + 5q^3 + 3q^4 + q^5, \\ \rho_{\mathcal{A}_G; B_2}(q) &= (1 + q)(1 + q + q^2)^2 = 1 + 3q + 5q^2 + 5q^3 + 3q^4 + q^5.\end{aligned}$$

Wenn wir außerdem

$$B_3 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 < x_1 < x_3 < x_4\}$$



(A) Die Kammerordnung des Arrangements aus Abbildung 27a bzgl. der Kammer B_1 aus Beispiel 5.46.

(B) Die Kammerordnung des Arrangements aus Abbildung 27a bzgl. der Kammer B_2 aus Beispiel 5.46.

ABBILDUNG 28. Weitere Kammerordnungen des Arrangements aus Abbildung 27a.

wählen, stellen wir schnell fest, dass B_3 kanonisch ist und dass $\text{Pos}(\mathcal{A}_G; B_3) \cong \text{Pos}(\mathcal{A}_G; B_2)$ gilt.

BEISPIEL 5.54: [2, Abbildung 4.1]

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement gegeben durch

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}, & H_2 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}, \\ H_3 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\}, & H_4 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 + 3x_2 = 0\}, \\ H_5 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0\}, & H_6 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0\}, \\ H_7 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Abbildung 29 zeigt den Durchschnitt von \mathcal{A} mit der affinen Hyperebene $H_1(\vec{e}_3)$.

Die Zerlegung

$$\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\} \uplus \{H_5, H_6, H_7\}$$

zeigt nach Satz 5.44, dass \mathcal{A} überauflösbar ist, denn es gilt:

$$H_5 \cap H_6 \subseteq H_2, \quad H_5 \cap H_7 \subseteq H_4, \quad H_6 \cap H_7 \subseteq H_1.$$

Die Exponenten von \mathcal{A} sind $e_1 = 1$ und $e_2 = e_3 = 3$, denn wir können aus Abbildung 29 ablesen, dass

$$\chi_{\mathcal{A}}(q) = (q-1)(q-3)^2.$$

Die rangerzeugende Funktion von $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ bzgl. einer kanonischen Kammer B ist also nach Satz 5.52 gerade

$$\rho_{\mathcal{A}; B}(q) = (1+q)(1+q+q^2+q^3)^2$$

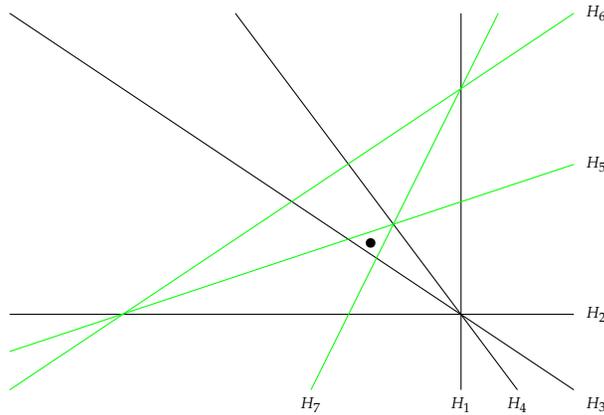


ABBILDUNG 29. Der Durchschnitt des überauflösbaren Arrangements aus Beispiel 5.54 mit der affinen Hyperebene $H_1(\vec{e}_3)$.

$$= 1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + 7q^4 + 5q^5 + 3q^6 + q^7.$$

Sei nun

$$R = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 > 0, 2x_1 - x_2 + 2x_3 < 0, x_1 - 3x_2 + 3x_3 > 0 \}$$

eine simpliziale Kammer von \mathcal{A} . In Abbildung 29 sehen wir direkt, dass R nicht kanonisch ist. Die rangerzeugende Funktion von $\text{Pos}(\mathcal{A}; R)$ ist

$$\rho_{\mathcal{A};B}(q) = 1 + 3q + 6q^2 + 6q^3 + 6q^4 + 6q^5 + 3q^6 + q^7,$$

faktoriert also nicht so schön.

Aus Satz 5.52 folgt direkt eine Formel für die Anzahl der Kammern eines überauflösbaren Arrangements. Diese können wir auch aus Satz 2.13 in Verbindung mit Satz 1.51 herleiten.

KOROLLAR 5.55

Sei \mathcal{A} überauflösbar mit Exponenten e_1, e_2, \dots, e_n . Dann ist

$$\#\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^n (e_i + 1).$$

LITERATUR

- [1] Christos A. Athanasiadis, *Characteristic Polynomials of Subspace Arrangements and Finite Fields*, *Advances in Mathematics* **122** (1996), 193–233.
- [2] Anders Björner, Paul H. Edelman, and Günther M. Ziegler, *Hyperplane Arrangements with a Lattice of Regions*, *Discrete & Computational Geometry* **5** (1990), 263–288.
- [3] Henry Crapo and Gian-Carlo Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1970.
- [4] Paul H. Edelman, *A Partial Order on the Regions of \mathbb{R}^n Dissected by Hyperplanes*, *Transactions of the American Mathematical Society* **283** (1984), 617–631.
- [5] Curtis Greene, *On the Möbius Algebra of a Partially Ordered Set*, *Advances in Mathematics* **10** (1973), 177–187.
- [6] ———, *Acyclic Orientations (Notes)* (Martin Aigner, ed.), Reidel, Dordrecht, 1977.
- [7] Curtis Greene and Thomas Zaslavsky, *On the Interpretation of Whitney Numbers through Arrangements of Hyperplanes, Zonotopes, Non-Radon Partitions, and Orientations of Graphs*, *Transactions of the American Mathematical Society* **280** (1983), 97–126.
- [8] Peter Orlik and Hiroaki Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer, Heidelberg, 1992.
- [9] Nathan Reading, *Lattice Theory of the Poset of Regions* (George Grätzer and Friedrich Wehrung, eds.), Vol. 2, Birkhäuser, Cham, 2016.
- [10] Gian-Carlo Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory I: Theory of Möbius Functions*, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **2** (1964), 340–368.
- [11] Louis Solomon, *The Burnside Algebra of a Finite Group*, *Journal of Combinatorial Theory* **2** (1967), 603–615.
- [12] Richard P. Stanley, *Acyclic Orientations of Graphs*, *Discrete Mathematics* **5** (1973), 171–178.
- [13] ———, *An Introduction to Hyperplane Arrangements* (Ezra Miller, Victor Reiner, and Bernd Sturmfels, eds.), IAS/Park City Mathematics Series, vol. 13, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [14] Thomas Zaslavsky, *Facing up to Arrangements: Face-Count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes*, *Memoirs of the American Mathematical Society* **1** (1975).