TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Ulrike Baumann, Henri Mühle Wintersemester 2017/18

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Algebra für Informationssystemtechniker"

Mengen, Vollständige Induktion

Ü1. Gegeben seien die folgenden Mengen

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, & B &= \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 5\},\\
C &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{0,1,2\} : x = 2^k\}, & D &= \{x \in \mathbb{N} \mid |x-2| \leqslant 1\},\\
E &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } 30\}, & F &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 = 13\},\\
G &= C \cap F, & H &= A \cup B \cup E.
\end{aligned}
$$

(a) Schreiben Sie die Mengen elementweise auf.

(b) Geben Sie die Teilmengenbeziehungen zwischen den Mengen an. Zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm der geordneten Menge $\big(\{A, B, C, D, E, F, G, H\}, \subseteq\big)$.

Ü2. (a) Geben Sie alle zweielementigen bzw. dreielementigen Teilmengen einer fünfelementigen Menge explizit an?

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Mengen gleich $\binom{n}{k}$ ist. Nutzen Sie diesen Zusammenhang, um zu beweisen, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 0$ und $0 \leqslant k \leqslant n$ gilt.

Ü3. (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass folgende Gleichungen für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$ gelten.

(i) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ (ii) $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Schlussfolgern Sie eine geschlossene Formel für die Summe $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k)^2$.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \geqslant 3$ die Summe der Innenwinkel eines natürlichen n-Ecks $\pi(n-2)$ beträgt.

A4. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 2. Übung unter Angabe von Name und Matrikelnummer abgeben.**

(a) Zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm der Potenzmenge einer vierelementigen Menge.

(b) Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Diagonalen eines ebenen, konvexen n-Ecks. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ für $n \geqslant 3$ gilt.

H5. Es sei $A = \{a, b\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, und $C = \mathcal{P}(B)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i)	$\{a\} \in A$	(ii)	$\{a\} \in B$	(iii)	$\{a\} \in C$	(iv)	$\big\{\{a\}\big\} \subseteq B$
(v)	$\big\{\{a\}\big\} \in C$	(vi)	$\{\varnothing\} \subseteq A$	(vii)	$\{\varnothing\} \subseteq B$	(viii)	$\{\varnothing\} \subseteq C$

H6. Über zwei Mengen A und B ist folgendes bekannt.

(i) $A \cup B = \big\{x^2 + y \mid x \in \{0, 1, 2\}, y \in \{0, 1, 2\}\big\}$.

(ii) $|A| = |B| + 3$.

(iii) $|A \cap B| = 2$.

(iv) $B \subseteq \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\big\}$.

Dadurch sind die Mengen A und B jedoch nicht eindeutig festgelegt.

(a) Geben Sie alle Mengen B elementweise an, die obige vier Bedingungen erfüllen.

(b) Wie viele Mengenpaare (A, B) gibt es, die obige Bedingungen erfüllen?

Hinweis: Sie dürfen die Gleichung $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$ verwenden.